LOGICA Y TEORIA DE LA CIENCIA

INVESTIGACION SOBRE LAS LEYES DEL PENSAMIENTO

George Boole

PARANINFO S.A.

INVESTIGACION
SOBRE LAS
LEYES DEL PENSAMIENTO

GEORGE BOOLE

INVESTIGACION SOBRE LAS LEYES DEL PENSAMIENTO

Colección
LOGICA Y TEORIA DE LA CIENCIA

Director:
PASCUAL MARTINEZ FREIRE
Profesor agregado Numerario de Lógica
Universidad Complutense de Madrid

1982

PARANINFO S.A.

MADRID

Traducido por:
José Antonio Suárez Hernández

© Dover Publications, Inc., New York
© de la edición española, Paraninfo, S.A. Madrid, España
© de la traducción española, Paraninfo, S.A. Madrid, España.

Título original:
AN INVESTIGATION OF THE LAWS OF THOUGHT

Reservados los derechos de edición, reproducción o adaptación

IMPRESO EN ESPAÑA
PRINTED IN SPAIN

ISBN: 0-486-60028-9 (edición norteamericana)
ISBN: 84-283-1168-4 (edición española)

Depósito Legal: M-2592-1982

PARANINFO S.A. Magallanes 25 – Madrid–15 (2-2740)

ALCO, artes gráficas. Jaspe, 34 - Madrid-26

INDICE

Prefacio 7

I Naturaleza y propósito de esta obra 11

II De los signos y sus leyes 29

III Derivación de las leyes 41

IV División de las proposiciones 51

V Principios del razonamiento simbólico 62

VI De la interpretación 74

VII De la eliminación 90

VIII De la reducción 104

IX Métodos de abreviación 118

X Condiciones de un método perfecto 136

XI De las proposiciones secundarias 143

XII Métodos para las proposiciones secundarias 158

XIII Clarke y Spinoza 165

XIV Ejemplo de análisis 195

XV De la Lógica aristotélica 201

XVI De la Teoría de las probabilidades. 215

XVII Método general en probabilidades. 223

XVIII Ejemplos elementales 241

XIX Sobre condiciones estadísticas 259

XX Problemas referentes a las causas 280

XXI Probabilidad de juicios 333

XXII Constitución del intelecto 352

PREFACIO

La siguiente obra no es una reimpresión de un tratado anterior del autor, titulado "El análisis matemático de la lógica". Su primera parte está ciertamente dedicada al mismo tema, y comienza estableciendo el mismo sistema de leyes fundamentales, pero sus métodos son más generales, y el ámbito de su aplicación mucho más amplio. Muestra los resultados, madurados por algunos años de estudio y reflexión, de un principio de investigación referente a las operaciones intelectuales, cuya exposición previa se escribió en el plazo de unas pocas semanas después de que se hubiera concebido su idea.

Aquella parte de esta obra que se refiere a la lógica presupone en el lector un conocimiento de los términos más importantes de la ciencia en cuestión, tal como es usualmente tratada, y de su tema general. Sobre estas cuestiones no hay mejor guía que "Los elementos de lógica" del Arzobiso Whately, o "Los bosquejos de las leyes del pensamiento" del Sr. Thomson. Al primero de estos tratados parece deberse en gran. medida el resurgimiento de la atención a esta clase de estudios. Se requiere también algún conocimiento de los principios del Algebra, mas no es necesario que esta aplicación haya sido llevada más allá de la solución de ecuaciones simples. Para el estudio de aquellos capítulos que se refieren a la teoría de las probabilidades se requiere un conocimiento algo mayor del Algebra, y especialmente de la doctrina de la Eliminación y de la solución de ecuaciones que contengan más de una incógnita.Información preliminar sobre el asunto se hallará en los tratados especiales sobre probabilidades en "Lardner's Cabinet Cyclopaedia", y la "Library of Useful Knowlegde", del Profesor De Morgan el primero, y de Sir John Lubbock el segundo; y en una serie de cartas del Sr. Quetelet traducidas del francés. Se darán otras referencias en el libro al final de cada capítulo. En una primera lectura puede omitir el lector a discreción los Capítulos X, XIV y XIX, junto con cualesquiera de las aplicaciones que pueda estimar poco interesantes o irrelevantes.

En diferentes partes de la obra, y especialmente en las notas del capítulo final, se hallarán referencias a varios autores, antiguos y modernos, fundamentalmente

propuestas a fin de ilustrar una determinada consideración de la historia de la filosofía. Con respecto a éstas cree el autor conveniente añadir que no ha citado en ninguna ocasión algo que no haya creído, tras minucioso examen, que se apoyaba o en autoridades paralelas o en el tenor general de la obra de la que se tomaba. Aunque con gusto hubiera evitado introducir algo que podía constituirse en el decurso de la lectura, sintió que se debía tanto al tema como a la verdad acompañar las aseveraciones del texto con los medios de comprobación.

Y si ahora, al finalizar una labor cuyo alcance pocas personas serán capaces de juzgar a partir de sus frutos aparentes, se le permite hablar por un momento de los sentimientos con que ha proseguido y con que ahora abandona su trabajo, diría que nunca dudó de que merecía la pena consagrar a ella sus mejores esfuerzos, que siempre tuvo conciencia de que fuera lo que fuera lo que en cuanto a verdad trajera a la luz no se trataba de algo privado o arbitrario, sino de algo independiente, en cuanto a su esencia, de cualquier opinión humana. Fue siempre plenamente consciente de que hombres doctos y capaces mantenían opiniones directamente opuestas sobre el tema de la Lógica a aquellas sobre las que se basaban todo el argumento y el procedimiento de su obra. Creyendo que aquellas opiniones eran erróneas, era consciente de que sus propias opiniones podrían verse afectadas negativamente por una influencia no detectada. Tuvo conciencia en particular del peligro que supone aquella influencia intelectual que una atención prolongada a un aspecto particular de la verdad tiende a producir. Pero confía en que de este conflicto de opiniones emergerá la misma verdad, más libre aún de toda mezcla personal; en que sus diferentes partes se verán en sus proporciones justas; y en que ninguna de ellas será estimada eventualmente en demasía o muy ligeramente tenida en cuenta debido a los prejuicios que pueden vincularse a la mera forma en que se expone.

A su valorado amigo el Rev. George Stephens Dickson, de Lincoln, desea el autor registrar su agradecimiento por su mucha y amable ayuda en la revisión de esta obra, y por algunas sugerencias importantes.

5, Grenville–Place, Cork
30 de Nov. 1853

NOTA

En la Prop. II, p. 229 por las "probabilidades absolutas" de los sucesos *x*, *y*, *z*... se entiende simplemente lo que deberían ser las probabilidades de tales sucesos a fin de que, considerándolos como independientes, y a sus probabilidades como nuestros únicos datos, las probabilidades calculadas de los mismos hechos bajo la condición V sean *p*, *q*, *r*... .La exposición del problema adjunto de la urna ha de modificarse de un modo similar. La verdadera solución de aquel problema, tal como se plantea de hecho, es $p' = cp$, $q' = cq$, donde c es la probabilidad arbitraria de la condición de que la bola extraida será o blanca, o de mármol, o ambas cosas a un tiempo. Ver p. 237, CASO II.

Por consiguiente, dado que por la reducción lógica la solución de todas las cuestiones en la teoría de las probabilidades es llevada a una forma tal que, a partir de las probabilidades de sucesos simples, *s*, *t*, etc. bajo una condición dada V, se requiere determinar la probabilidad de alguna combinación A de aquellos sucesos bajo la misma condición, el principio de la demostración en Prop. IV es realmente el siguiente:

"La probabilidad de una tal combinación A bajo la condición V ha de calcularse como si los sucesos *s*, *t*, etc. fueran independientes y poseyeran tales probabilidades como para hacer que las probabilidades derivadas de los dichos sucesos bajo la misma condición V fueran como las que se les asigna en los datos". Considero este principio axiomático. Admite a la vez de verificación indefinida, tanto de un modo directo como mediante los resultados del método de que forma la base. Creo conveniente añadir que fué en la forma anterior como el principio se presentó por primera vez a mi mente, y que es así como siempre lo he entendido, habiendo surgido el error en el problema particular antes referido por una inadvertencia a la hora de la elección de un ejemplo concreto.

CAPITULO I

NATURALEZA Y PROPOSITO DE ESTA OBRA

1. El propósito del siguiente tratado es investigar las leyes fundamentales de aquellas operaciones de la mente mediante las cuales se lleva a cabo el razonamiento; expresarlas en el lenguaje simbólico de un cálculo, y establecer sobre esta base la ciencia de la Lógica y construir su método; hacer de dicho método la base de un método general que permita la aplicación de la doctrina matemática de las probabilidades; y, finalmente, reunir a partir de los varios elementos de la verdad explicitados en el curso de estas investigaciones algunas indicaciones probables referentes a la naturaleza y la constitución de la mente humana.

2. Que este propósito no es del todo nuevo no hace falta hacerlo notar, y es bien sabido que una muy considerable parte de la atención de los filósofos ha sido dirigida a sus dos más importantes divisiones prácticas de Lógica y Teoría de las Probabilidades. En su forma antigua y escolástica, en verdad, la disciplina de la Lógica se mantiene asociada casi exclusivamente al gran nombre de Aristóteles. Y fue presentada a la antigua Grecia en las disquisiciones en parte técnicas y en parte metafísicas del Organon, de un modo tal que, con apenas algún cambio esencial, ha continuado hasta el día de hoy. La corriente de investigación original se ha dirigido más bien hacia cuestiones de filosofía general que, a pesar de haberse originado en las disputas de los lógicos, han dejado su origen a la espalda y han dado a épocas sucesivas de especulación su peculiar carácter y tendencia. Las eras de Porfirio y Proclo, de San Anselmo y Abelardo, de Ramus, y de Descartes, junto con las protestas de Bacon y Locke, aparecen ante la mente como ejemplos de las remotas influencias de dicho estudio sobre el curso del pensamiento humano, sugiriendo de una parte temas fértiles para la discusión y provocando de otra protestas contra sus pretensiones indebidas. La historia de la teoría de las probabilidades, por otra parte, ha dado muestras en mucha mayor medida de ese carácter de crecimiento constante que es propio de la ciencia. En su origen el genio temprano de Pascal –en sus estadios más maduros de desarrollo las más recónditas de todas las especulaciones matemáticas de Laplace– se dirigieron a su mejoramiento; por no citar aquí otros nombres algo menos distinguidos que los de aquellos. Así como el estudio de la Lógica ha sido notable por las cuestiones emparentadas de Metafísica que ha dado oca-

sión de plantear, el de teoría de las probabilidades lo ha sido por el impulso que ha dado a los departamentos más elevados de la ciencia matemática. Cada uno de estos estudios, además, ha sido considerado justamente como relacionado con un fin especulativo no menos que con uno práctico. El permitirnos deducir inferencias correctas a partir de unas premisas dadas no es el único objeto de la Lógica; así como tampoco es la única pretensión de la teoría de las probabilidades el enseñarnos a establecer el negocio de los seguros de vida sobre una base sólida; y a cómo condensar cualquier cosa de valor en los registros de innumerables observaciones en el campo de la astronomía, la física, o en ese campo de investigación social que va adquiriendo rápidamente un carácter de gran importancia. Ambos estudios poseen además un interés de otro tipo, derivado de la luz que arrojan sobre las potencias intelectuales. Nos instruyen en lo referente al modo según el cual el lenguaje y el número sirven de ayudas instrumentales en los procesos de razonamiento; nos revelan en cierta medida la conexión existente entre las diferentes potencias de nuestro común intelecto; nos ponen delante lo que, en los dos dominios del conocimiento probable y demostrativo, constituyen los criterios esenciales de verdad y corrección —criterios no extraídos de afuera, sino fundamentados profundamente en la constitución de las facultades humanas. Estas metas de la especulación no desmerecen ni en interés ni en dignidad, ni aun, podría añadirse, en importancia, de los propósitos prácticos con cuya búsqueda han sido asociados históricamente. Exponer las leyes secretas y las relaciones de aquellas elevadas facultades del pensamiento mediante las cuales se llega a o se madura todo aquello que trasciende del mero conocimiento perceptivo del mundo y de nosotros mismos, es un propósito que no ha menester de panegíricos para una mente racional.

3. Mas aunque ciertas partes del propósito de este trabajo han sido consideradas por otros, su concepción general, su método, y, en buena medida, sus resultados, los consideramos originales. Por esta razón ofreceré, en el presente capítulo, algunas exposiciones y explicaciones preparatorias a fin de que la finalidad real de este tratado pueda entenderse y se facilite el tratamiento de su tema.

Se pretende en primer lugar investigar las leyes fundamentales de aquellas operaciones de la mente mediante las cuales se lleva a cabo el razonamiento. Resulta innecesario entrar aquí en ninguna argumentación tendente a probar que las operaciones de la mente están en cierto sentido real sometidas a leyes, y que una ciencia de la mente es, por lo tanto, *posible*. Si estas cuestiones pueden dudarse, no hay que hacer frente a la duda por medio de una tentativa de establecer *a priori* la cuestión que se disputa, sino más bien dirigiendo la atención del objetante a la evidencia de leyes de hecho, remitiéndole a una ciencia constituida. Y, de esta manera, la solución de esta duda correspondería no a la introducción de este tratado, sino al mismo tratado. Concédasenos la suposición de que es posible una ciencia de los poderes intelectuales, y consideremos por un momento cómo ha de obtenerse el conocimiento de la misma.

4. Como todas las demás ciencias, la de las operaciones intelectuales debe

apoyarse primariamente sobre la observación, siendo el asunto de dicha observación las mismas operaciones y procesos de que deseamos determinar las leyes. Pero mientras que la necesidad de un fundamento en la experiencia es así una condición común a todas las ciencias, existen algunas diferencias especiales entre los modos en que este principio llega a ser aprovechable para la determinación de verdades generales cuando el tema de la investigación es la mente y cuando lo es la naturaleza exterior. A estas cuestiones es necesario dirigir ahora la atención.

Las leyes generales de la naturaleza no son, en su mayor parte, objetos inmediatos de la percepción. Son ora inferencias inductivas extraídas a partir de un gran conjunto de hechos cuya verdad común expresan, o, en su origen al menos, hipótesis físicas de naturaleza causal que sirven para explicar los fenómenos con una gran precisión y para permitirnos predecir nuevas combinaciones de los mismos. Son en todos los casos, y en el sentido más estricto del término, conclusiones *probables* que se aproximan en verdad cada vez más a la certeza en la medida en que reciben más y más confirmación a partir de la experiencia. Pero del carácter de probabilidad, en el sentido propio y estricto de este término, no se despojan nunca. Por otra parte, el conocimiento de las leyes de la mente no requiere como fundamento una colección extensa de observaciones. La verdad general se ve en el caso particular, y no se confirma por la repetición de casos particulares. Podemos ilustrar esta situación mediante un ejemplo obvio. Podría dudarse de que aquella fórmula de razonamiento que se llama el *dictum de omni et nullo,* de Aristóteles, exprese una ley primaria del razonamiento humano o no lo haga; pero no se puede dudar de que expresa una verdad general en lógica. Ahora bien, esa verdad se hace manifiesta en toda su generalidad a partir de la reflexión sobre un solo caso particular de su aplicación. Y esto es tanto una prueba de que el principio o fórmula particular de que se trata se basa en alguna ley o leyes generales de la mente, como una ilustración de la doctrina de que la percepción de tales verdades generales no se deriva de una inducción a partir de muchos casos particulares, sino que se halla contenida en la comprensión clara de un sólo caso particular. En conexión con esta verdad se puede ver la no menos importante de que nuestro conocimiento de las leyes sobre las que reposa la ciencia de las potencias intelectuales, cualquiera que sea su alcance o su deficiencia, no es conocimiento probable. Pues no sólo vemos en el ejemplo particular la verdad general, sino que la vemos como una verdad cierta —una verdad referente a la cual nuestra confianza no irá aumentando a medida que se incremente la experiencia de sus verificaciones prácticas.

5. Mas si las verdades generales de la Lógica son de una naturaleza tal que una vez presentadas ante la mente fuerzan inmediatamente el asentimiento, ¿en qué consiste la dificultad de construir la ciencia de la Lógica?. Podría contestarse que no en la recolección de los materiales del conocimiento, sino en la discriminación de su naturaleza y en la determinación de su lugar y relación mutuos. Todas las ciencias constan de verdades generales, pero de aquellas sólo algunas son primarias y fundamentales, siendo las demás secundarias y derivadas. Las leyes del movimiento

elíptico, descubiertas por Kepler, son verdades generales en astronomía, pero no son sus verdades fundamentales. Y de igual modo acaece en las ciencias puramente matemáticas. Una diversidad casi ilimitada de teoremas conocidos, y una posibilidad infinita de otros, hasta la fecha desconocidos, se apoyan a un tiempo sobre la base de unos pocos axiomas simples, y sin embargo todas son verdades *generales*. Podría añadirse que se trata de verdades que para una inteligencia suficientemente refinada resplandecerían con luz propia sin la ayuda de esos enlaces de pensamiento, de esos pasos fatigosos y pesados en la deducción mediante los cuales se llega a conocerlas. Definamos como fundamentales aquellas leyes y principios a partir de los cuales todas las restantes verdades generales de la ciencia pueden deducirse y en que pueden de nuevo todas ellas resolverse. ¿Erraremos, pues, si consideramos como verdadera ciencia de la Lógica a aquella que, habiendo establecido ciertas leyes elementales, confirmadas con el mismo testimonio de la mente, nos permite desde allí deducir, mediante procesos uniformes, toda la cadena de sus consecuencias secundarias y nos proporciona métodos de perfecta generalidad para su aplicación práctica?. Considérese si en cualquier ciencia, vista ora como un sistema de verdades o como el fundamento de un arte práctica, puede existir propiamente cualquier otra prueba de lo completo y del carácter fundamental de sus leyes que lo completo de sus sistema de verdades derivadas y la generalidad de los métodos que sirve para establecer. Otras cuestiones pueden ciertamente presentarse. La conveniencia, la prescripción, la preferencia individual pueden presionar con sus pretensiones y merecer atención. Pero en lo que respecta a la cuestión de lo que constituye a la ciencia en su integridad abstracta, entiendo que ninguna otra consideración aparte de las susodichas posee en rigor ningún valor.

6. Nos proponemos después expresar en este tratado las leyes fundamentales del razonamiento en el lenguaje simbólico de un cálculo. Sobre esta sección bastará con decir que tales leyes son de una índole tal como para permitir este tipo de expresión y como para darle una idoneidad peculiar y exclusiva para los fines que se pretenden.

Existe no sólo una íntima analogía entre las operaciones de la mente en el razonamiento general y sus operaciones en la ciencia particular del álgebra, sino además una concordancia exacta en una medida considerable en las leyes por medio de las cuales las dos clases de operaciones se llevan a cabo. Obviamente las leyes deben determinarse independientemente en cada caso; cualquier concordancia formal entre ellas puede establecerse tan sólo *a posteriori* mediante una comparación de hecho. Tomar prestada la notación de la ciencia del número y asumir después que en su nueva aplicación las leyes que gobiernan su uso permanecerán inalteradas sería una mera hipótesis. Existen ciertamente algunos principios generales fundados en la misma naturaleza del lenguaje mediante los cuales se determina el uso de los símbolos, que no son sino los elementos del lenguaje científico. En cierta medida estos elementos son arbitrarios. Su interpretación es puramente convencional: nos es permitido usarlos en el sentido que nos plazca. Pero a esta licencia la limi-

tan dos condiciones indispensables; primero, que nunca nos apartemos del sentido que hayamos establecido convencionalmente en un mismo proceso de razonamiento; y, segundo, que las leyes sobre las que se conduce el proceso se funden exclusivamente sobre el sentido o significado de los símbolos empleados arriba establecido. De acuerdo con estos principios cualquier concordancia que pueda establecerse entre las leyes de los símbolos de la Lógica y los del álgebra no puede sino dar por resultado una identidad de procesos. Las dos provincias de interpretación permanecen separadas e independientes, sometida cada una de ellas a sus propias leyes y condiciones.

Ahora bien, las investigaciones contenidas en las páginas siguientes presentan la Lógica, en su aspecto práctico, como un sistema de procesos llevados a cabo con ayuda de símbolos que poseen una interpretación definida, y sometidos a leyes fundadas solamente sobre dicha interpretación. Pero a un tiempo presentan esas leyes como idénticas en cuanto a la forma con las leyes de los símbolos generales del álgebra, con una única añadidura, a saber, que los símbolos de la Lógica están sometidos además a una ley especial (Capítulo II) a la que los símbolos de la cantidad, en cuanto tales, no se hallan sometidos. En lo referente a la naturaleza y evidencia de esta ley no nos proponemos en este momento explayarnos. Estas cuestiones se discutirán detenidamente en una página futura. Pero en tanto que constituye el fundamento esencial en que se basa la diferencia entre aquellas formas de inferencia sobre las que versa la Lógica y las que se presentan en la ciencia particular del número, merece la ley en cuestión algo más que una observación pasajera. Puede decirse que yace en el mismísimo fundamento del razonamiento general, – que gobierna aquellos actos intelectuales de conceptuación o imaginación que son preliminares a los procesos de deducción lógica, y que otorga a los procesos mismos mucho de su forma y expresión efectivas. Se puede por ello afirmar que esta ley constituye el germen o principio seminal del que toda aproximación a un método general en la Lógica es el desarrollo más o menos perfecto.

7. Ya se ha establecido el principio (5) de que la suficiencia y el carácter verdaderamente fundamental de cualquier sistema de leyes asumido en la ciencia de la Lógica debe verse en parte en la perfección de los métodos a que nos conducen. Queda, pues, por considerar cuáles son los requerimientos de un método general en la Lógica y hasta qué punto se cumplen en el sistema de la presente obra.

La Lógica sabe de dos tipos de relaciones -relaciones entre cosas y relaciones entre hechos-. Mas, puesto que los hechos se expresan mediante proposiciones, el segundo tipo de relación puede, al menos para los fines de la Lógica, resolverse en una relación entre proposiciones. La aserción de que el hecho o acontecimiento A es una consecuencia invariable del hecho o acontecimiento B puede considerarse, en cierta medida por lo menos, como equivalente a la afirmación de que la verdad de la proposición que afirma el acaecimiento del hecho B implica siempre la verdad de la proposición que afirma el acaecimiento del hecho A. En vez, pues, de decir que la Lógica sabe de relaciones entre cosas y relaciones entre hechos, podemos decir que tiene que habérselas con relaciones entre cosas y relaciones entre proposiciones.

Del primer tipo de relaciones tenemos un ejemplo en la proposición -"Todos los hombres son mortales"; y del segundo en la proposición -"Si el sol es totalmente eclipsado, se harán visibles las estrellas". Una expresa la relación entre "hombres" y "mortales", la otra una relación entre las proposiciones elementales -"El sol es totalmente eclipsado"; "Se harán visibles las estrellas". Entre tales relaciones presupongo incluidas aquellas que afirman o niegan la existencia con respecto a cosas y aquellas que afirman o niegan la verdad con respecto a proposiciones. Ahora bien, llámese a aquellas cosas o a aquellas proposiciones entre las que se expresa una relación los elementos de las proposiciones mediante las cuales se expresa tal relación. Partiendo de esta definición podemos, pues, decir que las *premisas* de cualquier argumento lógico expresan unas relaciones *dadas* entre ciertos elementos, y que la *conclusión* debe expresar una relación *implicada* entre aquellos elementos, o entre una parte de los mismos, es decir, una relación implicada por o contenida inferencialmente en las premisas.

8. Ahora bien, presupuesto esto, los requerimientos de un método general en Lógica parecen ser los siguientes:

PRIMERO: Dado que la conclusión debe expresar una relación entre todos o una parte de los elementos contenidos en las premisas, nos es preciso poseer el medio de eliminar aquellos elementos que no deseamos que aparezcan en la conclusión y un modo de determinar la cantidad total de relación implicada por las premisas entre los elementos que deseamos conservar. Aquellos elementos que no se presentan en la conclusión se llaman, en el lenguaje de la Lógica común, términos medios, y el tipo de eliminación ejemplificado en los tratados de Lógica consiste en deducir a partir de dos proposiciones que contienen un elemento común o término medio una conclusión que conecta los dos términos restantes. Pero el problema de la eliminación, tal como se proyecta llevar a cabo en esta obra, posee un alcance mucho mayor. Pretende no sólo la eliminación de un término medio de dos proposiciones, sino la eliminación en general de los términos medios en las proposiciones sin tener en cuenta ora el número de los mismos o la naturaleza de su conexión. A este fin ni los procesos de la Lógica ni los del Algebra en su estado actual presentan analogía estricta alguna. En el Algebra se sabe que el proceso de eliminación se limita de la siguiente manera: de dos ecuaciones podemos eliminar un símbolo de cantidad; de tres, dos símbolos; y, en general, a partir de n ecuaciones podemos eliminar $n - 1$ símbolos. Mas aunque esta condición, necesaria en el Algebra, parece imperar asimismo en la Lógica actual, no tiene lugar en la Lógica como ciencia. En ella no se puede probar que impere relación alguna entre el número de términos a eliminar y el número de proposiciones a partir de las cuales ha de llevarse a cabo la eliminación. De la ecuación que representa una única proposición se puede eliminar cualquier cantidad de símbolos que representen términos o elementos en Lógica; y de cualquier número de ecuaciones que represente proposiciones, un símbolo o los que se deseen de este tipo pueden eliminarse de un modo similar. Para tal eliminación existe un proceso general aplicable a todos los casos. Esta es una de las muchas

consecuencias notables de aquella ley distintiva de los símbolos de la Lógica cuya mención ya se ha hecho.

SEGUNDO: Debería ser competencia de un método general en Lógica expresar la relación final entre los elementos de la conclusión mediante cualquier *tipo* admisible de proposición o por medio de un *orden* escogido entre los términos. Entre las variedades de tipo podemos considerar aquellas que los lógicos han designado con los términos categórico, hipotético, disyuntivo, etc. En lo referente a una elección o selección en el orden de los términos podemos hacer referencia a todo lo que depende de la aparición de elementos particulares en el sujeto o en el predicado, en el antecedente o en el consecuente de aquella proposición que constituye "la conclusión". Pero, renunciando al lenguaje de las Escuelas, consideremos cuáles son las especies realmente distintas de problemas que pueden presentársenos. Hemos visto que los elementos de la relación final o inferida pueden ser o *cosas* o *proposiciones*. Supongamos el primer caso; puede, pues, pedirse la deducción a partir de las premisas de una definición o descripción de alguna cosa, o clase de cosas, que constituya un elemento de la conclusión en términos de otras cosas que se contienen en ella. O podemos formar el concepto de alguna cosa o clase de cosas que contenga más de uno de los elementos de la conclusión y pedir su expresión a base de los otros elementos. Suponiendo ahora que los elementos conservados en la conclusión son proposiciones podríamos desear averiguar cuestiones como las siguientes, a saber, si en base a las premisas cualesquiera de estas proposiciones, tomadas separadamente, son verdaderas o falsas, o si determinadas combinaciones entre ellas son verdaderas o falsas, o si suponiendo que una proposición particular es verdadera se seguirán algunas consecuencias, y si es este el caso, qué consecuencias en lo que respecta a las demás proposiciones. O si, supuesta una determinada condición en lo referente a algunas de las proposiciones, se seguirán algunas consecuencias, y cuáles, en lo atañedero a las demás, etc. Afirmo que se trata de cuestiones generales que correspondería resolver dentro del ámbito de un método general de Lógica. Quizás pudiésemos incluirlas a todas en esta exposición del problema decisivo de la Lógica clásica. Dado un conjunto de premisas que expresan relaciones entre ciertos elementos, ya sean cosas o proposiciones, se pide explícitamente la relación total consecuente entre cualesquiera de aquellos elementos bajo cualesquiera condiciones propuestas, y en cualquier forma propuesta. Que este problema es soluble en todos sus aspectos se verá después. Pero no es en atención a hacer notar este hecho por lo que la investigación anterior sobre la naturaleza y las funciones de un método general en Lógica ha sido introducido. Es necesario que el lector comprenda cuáles son los fines específicos de la investigación en que estamos entrando, así como los principios que han de conducirnos a alcanzarlos.

9. Posiblemente pueda decirse en este contexto que la Lógica de Aristóteles, en sus reglas del silogismo y la conversión, expone los procesos elementales en que consiste todo razonamiento, y que más allá de estos no existe ni campo de aplicación ni ocasión para un método general. No deseo señalar los defectos de la Lógica común, y tampoco referirme a ella en mayor medida de lo que sea menester a fin de

situar en su verdadera luz la naturaleza del presente tratado. Con sólo este fin a la vista haría notar:

PRIMERO: Que el silogismo, la conversión, etc., no son los procesos fundamentales de la Lógica. Se mostrará en este tratado que se basan y que se resuelven en procesos ulteriores y más simples que constituyen los elementos reales del método en la Lógica. Además tampoco es de hecho verdad que toda inferencia sea reducible a las formas particulares del silogismo y la conversión. (Vide capítulo XV).

SEGUNDO: Si toda inferencia fuera reducible a estos dos procesos (y se ha sostenido que es reducible a sólo el silogismo) seguiría siendo necesario un método general. Pues sería aún imprescindible determinar el orden en que los procesos deberían seguirse entre sí, así como su naturaleza particular, a fin de determinar la relación deseada. Por relación deseada entiendo aquella relación completa que, en virtud de las premisas, conecta cualesquiera elementos seleccionados a voluntad a partir de las premisas, y que, además, expresa dicha relación en cualquier forma y orden que se deseen. Si podemos juzgar a partir de las ciencias matemáticas, que son los ejemplos más perfectos de método conocidos, esta función *directiva* del Método constituye su principal oficio y distinción. Los procesos fundamentales de la aritmética, por ejemplo, no son en si mismos sino los elementos de una ciencia posible. Indicar su naturaleza es la primera tarea de su método, pero ordenar su sucesión es su función subsecuente y más elevada. En los ejemplos más complejos de deducción lógica, y especialmente en aquellos que constituyen una base para la solución de cuestiones difíciles en la teoría de las probabilidades, la ayuda de un método directivo, tal como sólo el cálculo puede ofrecer, es indispensable.

10. Cómo es que las leyes fundamentales de la Lógica son matemáticas en su forma; por qué son, excepto en un sólo punto, idénticas a las leyes generales del número, y por qué difieren en ese punto particular, son preguntas respecto a las cuales quizás no se halle muy lejos de la presunción el intentar pronunciar un juicio categórico. Probablemente se hallen más allá del alcance de nuestras limitadas facultades. Puede quizás serle permitido a la mente obtener conocimiento de las leyes a las que ella misma se halla sujeta, sin que le sea dado entender su fundamento y origen, o incluso, excepto en una medida muy limitada, comprender su adecuación a su fin, comparada con otros sistemas concebibles de leyes. Tal conocimiento es, en verdad, innecesario para los fines de la ciencia, a quien corresponde ocuparse de lo que es, y no busca fundamentos para la preferencia o razones de concordancia. Estas consideraciones proporcionan una respuesta suficiente a todas las protestas en contra de la presentación de la Lógica bajo la forma de un cálculo. No se trata de que elijamos para ella tal modo de exposición, sino de que las leyes últimas del pensamiento hacen dicho modo posible, y prescriben su carácter, y prohiben, como parece, la manifestación perfecta de la ciencia en cuestión de cualquier otro modo, por lo que éste exige ser adoptado. Debe recordarse que no es asunto de la ciencia crear leyes, sino descubrirlas. Nosotros no creamos la constitu-

ción de nuestras propias mentes, por muy grande que sea nuestro poder de modificar su carácter. Y así como las leyes del intelecto humano no dependen de nuestra voluntad, también las formas de la ciencia, de la que constituyen la base, son en todos los aspectos esenciales independientes de la elección individual.

11. Junto a la exposición general de los principios del método arriba mencionado, mostrará este tratado su aplicación al análisis de una considerable variedad de proposiciones y de series de proposiciones que constituyan las premisas de argumentos demostrativos. Estos ejemplos han sido seleccionados de diversos autores difieren grandemente en cuanto a la complejidad, y abarcan un amplio espectro de temas. Aunque a este respecto pueda parecer a algunos que se ha ejercido una elección sobre una base demasiado amplia, no estimo necesario presentar sobre este punto mis excusas. Que la Lógica, en cuanto ciencia, sea susceptible de muy amplias aplicaciones es cosa admitida; mas es igualmente cierto que sus formas y procesos últimos son matemáticos. Cualquier objeción *a priori* que pudiese por lo tanto suponerse como fundamento en contra de la adopción de tales formas y procesos en la discusión de un problema de moral o de filosofía general debe basarse en un error o en una falsa analogía. No pertenece a la esencia de las matemáticas el limitarse a las ideas de número y cantidad. El que sea deseable que llegue a ser un hábito mental generalizado aplicar procesos simbólicos a los argumentos morales es otra cuestión. Posiblemente, como he hecho ver en otra parte, (1) el perfeccionamiento del método de la Lógica puede que sea valioso principalmente en cuanto evidenciador de la verdad especulativa de sus principios. Reemplazar el empleo del razonamiento común, o someterlo al rigor de las formas técnicas, sería el último deseo de quien conoce el valor de tal labor y combate intelectual que imparte a la mente un vigor atlético y la enseña a contender con las dificultades y a fiarse de sí misma en una situación imprevista. Sin embargo, pueden darse casos en que el valor de un procedimiento científico, incluso en aquellas cosas que caen según se reconoce bajo el dominio ordinario de la razón, pueda sentirse y reconocerse. Algunos ejemplos de este tipo se encontrarán en el presente trabajo.

12. La doctrina general y el método de la Lógica arriba explicados forman también la base de una teoría y un método correspondiente para el estudio de las probabilidades. Según esto, el desarrollo de tal teoría y método, basados sobre los principios antedichos, constituirán un objeto diferenciado del presente tratado. Sobre la naturaleza de tal aplicación sería deseable dar aquí cuenta somera, más especialmente en lo que concierne al carácter de las soluciones a las que conduce. En conexión con este objeto será necesario detallar algo más en lo referente a las formas en que se presentan los resultados de los análisis lógicos.

El fundamento de la necesidad de un método previo en Lógica como base de una teoría de las probabilidades puede consignarse en pocas palabras. Antes de que podamos determinar el modo en que la frecuencia esperada de un acontecimiento determinado depende de la frecuencia conocida de cualesquiera otros acontecimientos, debemos conocer la dependencia mutua de los acontecimientos mismos. Hablando técnicamente, debemos poder expresar el acontecimiento cuya probabili-

dad se busca como una función de los acontecimientos cuyas probabilidades se conocen. Ahora bien, esta determinación explícita corresponde en todos los casos al ámbito de la Lógica. La probabilidad, sin embargo, en su acepción matemática admite medición numérica. De aquí que el tema de las probabilidades corresponda igualmente a la ciencia del número y a la de la Lógica. En su reconocimiento de la existencia coordinada de estos dos elementos difiere el presente tratado de todos los anteriores; y como esta diferencia afecta no sólo a la cuestión de la posibilidad de la solución de problemas en un gran número de casos sino que además introduce nuevos e importantes elementos en las soluciones halladas, estimo necesario consignar aquí con cierta amplitud las consecuencias peculiares de la teoría desarrollada en las páginas siguientes.

13. La medida de la probabilidad de un acontecimiento se define usualmente como una fracción en que el numerador representa el número de casos favorables al acontecimiento y el denominador el número total de casos, favorables y desfavorables, suponiéndose que todos los casos son igualmente susceptibles de ocurrir. Esta definición se adopta en el presente trabajo. A un tiempo se muestra que existe otro aspecto de la cuestión (al que nos referiremos dentro de poco) que podría igualmente tenerse por fundamental y que de hecho conduciría al mismo sistema de métodos y conclusiones. Podría añadirse que hasta donde las conclusiones admitidas de la teoría de las probabilidades se extienden, y en la medida en que son consecuencia de sus definiciones fundamentales, no difieren de los resultados (supuestos igualmente correctos en cuanto a inferencia) del método de este trabajo.

Además, aunque las cuestiones de la teoría de las probabilidades se presentan bajo varios aspectos y pueden ser modificadas de diversas maneras por medios algebraicos y de otro tipo, parece existir un tipo general al que todas estas cuestiones, o tantas de entre ellas cuantas realmente pertenecen a la teoría de las probabilidades, pueden referirse. Considerado en referencia a los *datos* y al *quaesitum*, dicho tipo puede describirse de la siguiente manera:

PRIMERO: Los datos son las probabilidades de uno o más acontecimientos dados, siendo cada probabilidad la del cumplimiento bajo unas condiciones supuestamente dadas.

SEGUNDO: El *quaesitum*, u objeto buscado, es la probabilidad del cumplimiento, absoluta o condicionalmente, de algún otro acontecimiento que difiere en la expresión de los contenidos en los datos pero que trae consigo más o menos los mismos elementos. En lo que concierne a los datos estos son o *dados causalmente* —como cuando la probabilidad de una determinada tirada de un dado se deduce de un conocimiento de la constitución del dado en cuestión— o son derivados de la observación de casos repetidos del éxito o el fracaso de los acontecimientos. En este último caso la probabilidad de un acontecimiento puede definirse como el límite hacia el que tiende la relación entre los casos favorables y el número total de casos observados (presuponiendo la uniformidad de la naturaleza) continuando indefinidamente las observaciones. Por último, en lo que se refiere a la naturaleza o la rela-

ción de los acontecimientos en cuestión queda una importante distinción. Tales acontecimientos son o *simples* o *compuestos.* Por acontecimiento compuesto se entiende aquel cuya expresión linguistica o cuya concepción intelectual depende de la expresión o la concepción de otros acontecimientos que en relación con él pueden considerarse *simples*. Decir "llueve" o "truena", es expresar el acaecer de un acontecimiento simple; pero decir "llueve y truena" u "o llueve o truena", es expresar el de uno compuesto. Porque la expresión de tal acontecimiento depende de las expresiones elementales "llueve", "truena". El criterio para distinguir los acontecimientos simples no es, por tanto, cualquier supuesta simplicidad en su naturaleza. Se funda sólamente en el modo de su expresión en el lenguaje o de su concepción en el pensamiento.

14. Ahora bien, un problema general que la teoría actual de las probabilidades nos permite resolver es el siguiente, a saber: dadas las probabilidades de algunos acontecimientos simples, hallar la probabilidad de un acontecimiento compuesto dado, es decir, de un acontecimiento compuesto de una cierta manera a partir de los acontecimientos simples. El problema puede también resolverse cuando el acontecimiento compuesto cuya probabilidad se busca está sometido a condiciones dadas, es decir, a condiciones que dependen también de una cierta manera de los acontecimientos simples dados. Junto a este problema general, existen asimismo problemas particulares cuyo principio de solución es conocido. Diversas cuestiones referentes a *causas* y *efectos* pueden resolverse mediante métodos conocidos desde la hipótesis particular de que las causas son mutuamente exclusivas, pero al parecer no de otra manera. Más allá de esto no está claro que se haya hecho ningún avance hacia la solución de lo que puede considerarse como el problema general de la ciencia, a saber: dadas las probabilidades de cualesquiera acontecimientos, simples o compuestos, condicionados o incondicionados, hallar la probabilidad de cualquier otro acontecimiento igualmente arbitrario en cuanto a expresión o concepción. En la exposición de esta cuestión ni siquiera se postula que los acontecimientos cuyas probabilidades están dadas y aquél cuya probabilidad se busca contengan algunos elementos comunes, porque es la misión de un método el determinar si los datos de un problema son suficientes para el fin que se persigue y el indicar, cuando no lo son, dónde se halla la deficiencia.

Este problema, en la forma menos restringida en que puede exponerse, se puede resolver merced al método del presente tratado, o, para hablar con mayor precisión, su solución teorética está completamente dada, y su solución práctica se hace dependiente tan sólo de procesos puramente matemáticos, tales como la resolución y el análisis de ecuaciones. El orden y la naturaleza de la solución general pueden ser descritos así.

15. En primer lugar, es siempre posible, merced al método preliminar del cálculo de la Lógica, expresar el acontecimiento cuya probabilidad se busca como una función lógica de los acontecimientos cuyas probabilidades están dadas. El resultado es de la siguiente naturaleza: supóngase que X representa el aconteci-

miento cuya probabilidad se busca, A, B, C, etc. los acontecimientos cuyas probabilidades son conocidas, siendo estos acontecimientos simples o compuestos. En ese caso la relación *total* (whole) del acontecimiento X con los acontecimientos A, B, C, etc. se deduce en forma de lo que los matemáticos llaman *desarrollo*, consistente en el caso más general de cuatro clases distintas de términos. En la primera clase se expresan aquellas combinaciones de los acontecimientos A, B, C, que acompañan necesariamente y necesariamente indican el acaecer del acontecimiento X; en la segunda clase aquellas combinaciones que acompañan necesariamente pero no implican el acaecer del acontecimiento X; en la tercera clase, aquellas combinaciones cuyo acaecer en conexión con el acontecimiento X es imposible pero no imposible de otra manera; en la cuarta clase, aquellas combinaciones cuyo acaecer es imposible bajo cualquier circunstancia. No explicaré extensamente esta exposición del resultado del análisis lógico del problema, bastándome con hacer notar que los elementos que presenta son precisamente aquellos por los que la expectación del acontecimiento X en cuanto dependiente de nuestro conocimiento de los acontecimientos A, B, C, es, o tan sólo puede ser, afectada. El razonamiento general verificaría esta conclusión, mas el razonamiento general no valdría generalmente para desenmarañar la complicada red de acontecimientos y circunstancias a partir de las cuales la solución arriba descrita debe ser desarrollada. La consecución de este objetivo constituye el primer paso hacia la solución completa de la cuestión propuesta. Hay que hacer notar que hasta aquí el proceso de solución es lógico, es decir, llevado a cabo mediante símbolos de significado lógico, y que termina en una ecuación interpretable como una *proposición*. Llamemos a este resultado la *ecuación lógica final*.

El segundo paso del proceso merece un comentario atento. A partir de la ecuación lógica final a que nos ha conducido el paso precedente se deducen por inspección una serie de ecuaciones algebraicas que contiene implícitamente la solución completa del problema propuesto. Sobre el modo respecto al cual se efectúa esta transición baste con decir que existe una relación definida entre las leyes mediante las que se expresan las probabilidades de los acontecimientos como funciones algebraicas de las probabilidades de otros acontecimientos de los que dependen y las leyes mediante las cuales la conexión lógica de los acontecimientos es, ella misma, expresada. Esta relación, como las restantes coincidencias de ley formal a que nos hemos referido, no se funda sobre hipótesis sino que se nos hace cognoscible mediante la observación (I.4), y la reflexión. Si se asumiese, sin embargo, su realidad *a priori* como la base de la misma definición de la probabilidad, la estricta deducción nos conduciría desde allí a la definición numérica admitida como una consecuencia natural. La teoría de las probabilidades se halla, como ya se ha hecho ver (I.12), en una relación igualmente próxima con la Lógica y la Aritmética; y es indiferente en cuanto a los resultados, el que la veamos como originándose a partir de la última de estas ciencias o fundándose en las relaciones mutuas que vinculan a ambas.

16. Se dan algunas circunstancias, interesantes quizás para el matemático, que acompañan a las soluciones generales deducidas a partir del método antes mencionado, que quizás fuera deseable reseñar.

PRIMERO: Como el método es independiente del número y la naturaleza de los datos, continúa siendo aplicable cuando estos últimos son insuficientes para hacer del valor buscado un valor determinado. Cuando es este el caso, la expresión final de la solución contendrá términos con coeficientes constantes arbitrarios. A tales términos corresponderán términos en la ecuación lógica final (I.15) cuya interpretación nos informará de qué nuevos datos se requieren a fin de determinar los valores de aquellas constantes y permitir así que la solución númerica sea completa. Si tales datos no se obtuvieran, podemos aún, otorgando a las constantes sus valores límites 0 y 1, determinar los límites entre los cuales ha de hallarse la probabilidad buscada con independencia de toda experiencia posterior. Cuando el acontecimiento cuya probabilidad se busca es *totalmente* independiente de aquellos cuya probabilidad se conoce, los límites así obtenidos para su valor serán 0 y 1, siendo evidente que así debe ser, y la interpretación de las constantes conducirá tan sólo a un replanteamiento del problema original.

SEGUNDO: La expresión de la solución final contendrá en todos los casos un elemento particular de cantidad determinable por la solución de una ecuación algebraica. Ahora bien, cuando dicha ecuación es de un grado elevado puede parecer que surja una dificultad en lo referente a la selección de la raiz correcta. Se dan ciertos casos en que tanto los elementos dados como los elementos buscados se hallan tan obviamente limitados por condiciones necesarias que no hay problema a la hora de elegir. Pero en casos complejos el descubrimiento de tales condiciones mediante la mera fuerza del razonamiento es imposible. Se requiere un método inequívoco para este fin -un método que podría llamarse de manera no inapropiada el cálculo de las condiciones estadísticas. No entraré en la naturaleza de este método salvo para decir que, como el método previo, se basa en el empleo de la "ecuación lógica final", y que categóricamente indica, primero, las condiciones que deben cumplirse entre los elementos numéricos de los datos a fin de que el problema pueda ser real, es decir, derivado de una *experiencia posible*; segundo, los límites numéricos entre los que la probabilidad que se busca debe hallarse si, en vez de determinarse teóricamente hubiese sido deducida directamente a partir de la observación del mismo sistema de fenómenos a partir de los cuales se obtuvieron los datos. Está claro que estos límites serán los límites efectivos de la probabilidad buscada. Ahora bien, suponiendo los datos sometidos a las condiciones arriba indicadas para los mismos aparece, en cada caso que he examinado, que existe una raiz, y sólo una, de la ecuación algebraica final que se someta a las limitaciones requeridas. Toda fuente de ambigüedad es, de este modo, eliminada. Parecería incluso que nuevas verdades referentes a la teoría de las ecuaciones algebraicas son sacadas a la luz. Es muy de notar que el elemento especial de la cantidad al que se refiere la discusión previa depende tan sólo de los *datos* y en absoluto lo hace del

quoesitum del problema propuesto. De aquí que la solución de cada problema particular desate el nudo de la dificultad para un sistema de problemas, a saber, para aquel sistema de problemas caracterizado por la posesión de datos comunes independientemente de la naturaleza de sus *quaesita*. Esta circunstancia es importante siempre que a partir de un sistema particular de datos se requiera deducir una serie de conclusiones asociadas. Y además otorga a las soluciones de problemas particulares aquel carácter de relación que se deriva de su dependencia de una unidad central y fundamental que de manera no infrecuente caracteriza la aplicación de métodos generales.

17. Mas aunque las consideraciones anteriores, junto con otras de naturaleza semejante, justifiquen el aserto de que el método de este tratado en cuanto a la solución de problemas en teoría de las probabilidades es un método general, no se sigue de allí que nos veamos libres en todos los casos de la necesidad del recurso a fundamentos hipotéticos. Se ha hecho notar que una solución puede consistir totalmente de términos afectados por coeficientes constantes arbitrarios -que puede ser de hecho completamente indefinida-. La aplicación del método de este trabajo a algunas de las más importantes cuestiones que caen dentro de su ámbito presentaría -si se empleasen tan sólo los datos de la experiencia- resultados de esta naturaleza. Para obtener una solución *concreta* se necesita, en tales casos, recurrir a hipótesis que posean mayor o menor probabilidad independiente, pero que sean incapaces de una verificación exacta. Hablando generalmente, tales hipótesis diferirán de los resultados inmediatos de la experiencia en cuanto participantes de una naturaleza lógica antes que numérica, en cuanto prescriptora de las condiciones bajo las que acaecen los fenómenos antes que en indicar la relativa frecuencia de su acaecimiento. Esta circunstancia es, sin embargo, carente de importancia. Cualquiera que sea su naturaleza, las hipótesis asumidas deben, a partir de entonces considerarse como pertenecientes a los datos efectivos, aunque tendentes, como es obvio, a dar a la solución misma algo de carácter hipotético. Con esta inteligencia de las posibles fuentes de los datos de hecho empleados el método es perfectamente general, aunque no sea responsable de la corrección de los elementos hipotéticos en él introducidos, así como tampoco de los datos numéricos derivados de la experiencia.

Como ilustración de estas consideraciones podemos observar que la teoría de la reducción de las observaciones astronómicas (2) descansa, en parte, sobre bases hipotéticas. Adopta ciertas posiciones en lo referente a la naturaleza del error, las probabilidades iguales de que se dé en forma de exceso o defecto, etc., sin las que sería imposible obtener ninguna conclusión *precisa* a partir de un sistema de observaciones contradictorias. Pero aceptando tales posiciones como las arriba mencionadas, el resto de la investigación cae estrictamente dentro del ámbito de la teoría de las probabilidades. Observaciones similares se aplican al importante problema que se propone deducir a partir de las actas de las mayorías de una asamblea deliberante, la probabilidad media de juicio correcto en uno de sus miembros. Si se aplicase el método de este tratado a los simples datos numéricos, la solución obte-

nida sería de ese tipo totalmente impreciso arriba descrito. Y para mostrar con un grado más eminente la insuficiencia de esos datos por sí mismos, la interpretación de las constantes arbitrarias (I.16) que aparecen en la solución, simplemente produce un replanteamiento del problema original. Admitiendo, sin embargo, la hipótesis de la formación independiente de la opinión en la mente individual, ora absolutamente, como según el modo de especular de Laplace y Poisson, o con las limitaciones impuestas por los datos que se poseen, como se hará en este tratado, capítulo XXI, el problema asume un carácter mucho más preciso. Se patentizará que el valor último de la teoría de las probabilidades ha de depender en gran medida de la formación correcta de tales hipótesis mediatas en los casos en que los datos puramente experimentales son insuficientes para llegar a una solución precisa, y en los casos en que aquella experiencia ulterior indicada por la interpretación de la ecuación lógica final es inalcanzable. Por otra parte, una prontitud excesiva en formar hipótesis en asuntos que por su propia naturaleza se hallan más allá de la comprensión humana debe afectar al prestigio de la teoría de las probabilidades y tender a arrojar dudas en la mente común sobre sus conclusiones más legítimas.

18. Sería quizás prematuro especular en este momento sobre la cuestión de si los métodos de la ciencia abstracta podrán en el futuro ser útiles en la investigación de los problemas sociales en una medida equivalente a como lo han sido en varios campos de la investigación física. Cualquier intento de resolver esta cuestión sobre bases racionales puramente *a priori* probablemente nos extraviaría. La consideración de la libertad de acción humana, por ejemplo, aparecería a primera vista excluir la idea de que los movimientos del sistema social manifiesten jamás ese carácter de evolución ordenada que estamos dispuestos a esperar bajo el dominio de una necesidad física. No obstante, las investigaciones del estadístico nos muestran ya hechos en desacuerdo con tal previsión. De este modo, los registros relativos al delito y el pauperismo presentan un grado de regularidad desconocido en ámbitos en que no se hace sentir la influencia perturbadora de los deseos y las pasiones humanas. Por otra parte, las alteraciones en la temperatura de las estaciones, la erupción de los volcanes, la propagación de plagas sobre los vegetales o enfermedades epidémicas en el reino animal, todo ello, cosas aparente o principalmente producto de causas naturales, se rehusan a someterse a leyes regulares y comprensibles. "Inconstante como el viento" es una expresión proverbial. La reflexión sobre estos puntos nos enseña en cierta medida a corregir nuestros juicios previos. Aprendemos que no podemos esperar que bajo el poder de la necesidad se ve un orden perceptible a la observación humana, a no ser que el juego de las causas que lo producen sea suficientemente simple; ni que, por otra parte, podamos juzgar que la libertad de acción del individuo sea incompatible con la regularidad en los movimientos del sistema del que forma componente unidad. La libertad humana se destaca como un hecho manifiesto de nuestra conciencia, mientras que también, según creo, como algo deducible con una probabilidad muy alta, basada (capítulo XXII) en la analogía a partir de aquella porción de la mente cuya constitución científica podemos

investigar. Pero ya sea aceptada como un hecho que se apoya en la conciencia, o como una conclusión sancionada por la razón, ha de interpretarse de tal modo que no conflictúe con un resultado establecido por la observación, a saber, que se dan fenómenos en los que intervienen grandes cantidades de hombres que de hecho manifiestan un grado notable de regularidad y que nos permiten en cada época sucesiva recoger los elementos sobre los cuales la apreciación de su estado de progreso, en la medida en que se manifiesta en resultados externos, debe depender. No hay, pues, objeción sólida *a priori* contra la posibilidad de disponer de aquella especie de datos que se requieren para la fundamentación experimental de una ciencia de la estadística social. Además, sea cualquier otro el objetivo que este tratado pueda cumplir, presumimos que no dejará ninguna duda en lo referente a la existencia de un sistema de principios abstractos y de métodos basados sobre tales principios mediante los cuales de cualquier cuerpo colectivo de datos sociales pueda extraerse, en forma explícita, cualquier información que contengan implícitamente. Puede que haya gran dificultad en obtener esta información cuando los datos sean excesivamente complejos -dificultad debida no a ninguna imperfección en la teoría sino al laborioso carácter de los procesos analíticos a que apunta-. Es perfectamente concebible que en muchos casos pueda ser de una índole tal que sólo un esfuerzo unitario pueda superarla.Mas que poseemos teoricamente en todos los casos, y prácticamente en la medida en que la requerida labor del cálculo puede ser suministrada, los medios de desarrollar a partir de los datos estadísticos las semillas de verdades generales que yacen enterradas entre la masa de números, es una opinión que puede afirmarse con toda seguridad.

19. Pero más allá de estas opiniones generales no oso hablar en términos de total confianza. El que los resultados que pudieran esperarse de la aplicación de los métodos científicos a los datos estadísticos por encima de aquellos cuyo descubrimiento no requiere tal ayuda, compense por el trabajo que supone instituir tales investigaciones sobre una dimensión adecuada, es una cuestión que sólo, quizás, la experiencia pueda decidir. Es de desear, y se podría sin gran atrevimiento hacerlo así, que en este, como en otros casos, las doctrinas abstractas de la ciencia satisfagan algo más que la mera gratificación intelectual. Y no parece muy improbable, considerando el orden manifiesto que han seguido las ciencias en su evolución, contribuyendo con su ayuda sucesivamente al servicio de la humanidad, que llegue un día en el cual una ayuda similar pueda deberse a departamentos del ámbito del conocimiento aún más íntimamente vinculados con los elementos del bienestar humano. Dejemos que las especulaciones de este tratado se limiten, sin embargo, por el momento a la pretensión de ser tenidas por ciertas.

20. Pretendo, en último lugar, esforzarme en educir a partir de los resultados científicos de las investigaciones precedentes, algunas indicaciones generales referentes a la naturaleza y la constitución de la mente humana. No es necesario entrar, por el momento, en los fundamentos de la posibilidad de este tipo de inferencia. Una o dos observaciones generales pueden servir para indicar el camino que me

esforzaré en seguir. No se puede sino admitir que nuestras opiniones en lo referente a la ciencia de la Lógica tienen que influir materialmente y quizás incluso determinar nuestras opiniones acerca de la naturaleza de las facultades intelectuales.La cuestión, por ejemplo, de si el razonamiento consiste tan sólo en la aplicación de ciertas verdades primeras o necesarias con que la mente se halla desde un principio en posesión, o de si la mente misma es una sede de la ley cuya actividad es tan concluyente en la fórmula particular como en la general, o de si, como algunos escritores distinguidos parecen sostener, todo el razonamiento versa sobre lo particular; esta cuestión, mantengo, es de una índole tal que no sólo afecta a la ciencia de la Lógica sino que también concierne a la formación de opiniones adecuadas en lo atañedero a la constitución de las facultades intelectuales. Además, si se concluyese que la mente es por su constitución originaria una sede de la ley la cuestión de su sumisión a esta ley -el que sea, por ejemplo, una obediencia basada en la necesidad, como la que sostiene las revoluciones de los cielos y preserva el orden de la nturaleza- o que se trate de una sumisión de algún otro tipo, es también una cuestión de profundo interés especulativo. Además, si la mente se halla en verdad determinada a ser un súbdito de la ley y si sus leyes están exactamente indicadas la cuestión de su probable o necesaria influencia sobre el curso del pensamiento humano en diferentes épocas es una cuestión que posee gran importancia, y que merece una paciente investigación como asunto tanto de la Filosofía como de la Historia. Propongo discutir, por muy imperfectamente que sea, estas y otras cuestiones en la parte final de la presente obra. Corresponden, quizás, al ámbito del conocimiento probable o conjetural, antes que al del positivo. Pero pudiera ocurrir que donde no hay suficiente justificación para las certezas de la ciencia existan fundamentos analógicos adecuados capaces de sugerir opiniones altamente probables. Me ha parecido más conveniente que esa discusión fuese enteramente reservada para la parte destinada al resultado del principal asunto de este tratado, que trata de la investigación de verdades y leyes científicas. La experiencia nos enseña lo bastante que el orden adecuado para avanzar en todas las investigaciones de la verdad es proceder de lo conocido a lo desconocido. Existen zonas incluso en el campo de investigación propio de la filosofía y constitución de la mente humana que han sido puestos totalmente al alcance de nuestra investigación. Conocer debidamente aquellas porciones de nuestra naturaleza y hacer de ellas la base de todos los esfuerzos por penetrar entre las sombras e incertidumbres de aquel ámbito conjetural que se halla más allá y por encima de ellas es el curso más acorde con las limitaciones de nuestra condición presente.

REFERENCIAS:

(1) Mathematical Analysis of Logic. London: G. Bell. 1847.
(2) El autor proyecta tratar este asunto en un trabajo separado o en un futuro apéndice. En el presente tratado evita el uso del cálculo integral.

CAPITULO II

DE LOS SIGNOS EN GENERAL, Y DE LOS SIGNOS APROPIADOS PARA LA CIENCIA DE LA LOGICA EN PARTICULAR; DE LAS LEYES A QUE TALES SIGNOS SE HALLAN SUJETOS

1. Que el lenguaje es un instrumento de la razón humana y no simplemente un medio para la expresión del pensamiento es una verdad admitida generalmente. Me propongo investigar en este capítulo qué es lo que hace al lenguaje de este modo un subordinado de la más importante de nuestras facultades intelectuales. En los diferentes pasos de esta investigación seremos llevados a considerar la constitución del lenguaje, entendido como un sistema adaptado a un fin o propósito, a investigar sus elementos, a intentar determinar su relación y dependencia mutuas, y a investigar de qué manera contribuyen a alcanzar el fin al que como parte coordinada de un sistema hacen referencia.

Al proceder a estas investigaciones no será necesario entrar en la discusión de aquella cuestión famosa de las Escuelas referente a si el lenguaje ha de considerarse como un instrumento *esencial* del razonamiento o si, por otra parte, nos es posible razonar sin su ayuda. Presumo que esta cuestión se halla próxima al propósito del presente tratado por la razón siguiente, a saber, que el asunto de la ciencia es investigar leyes y que, ora consideremos los signos como los representantes de las cosas y sus relaciones, ora como los representantes de las concepciones y operaciones del intelecto humano, al estudiar las leyes de los signos estamos de hecho estudiando las leyes manifiestas del razonamiento. Si existe alguna diferencia entre ambas investigaciones, es de tal índole que no afecta a las expresiones científicas de la ley formal, objeto de la investigación en el estadio actual de esta obra, sino que hace referencia tan solo al modo en que aquellos resultados que presentan a la consideración mental. Pues aunque al investigar las leyes de los signos *a posteriori* el objeto inmediato que se examina es el lenguaje junto con las reglas que rigen su uso, en tanto que haciendo de los procesos internos del pensamiento el objeto directo de la investigación, apelamos de un modo más inmediato a nuestra conciencia personal, hallaremos que en ambos casos los resultados obtenidos son formalmente equivalentes. Y no podríamos fácilmente concebir tampoco que las innúmeras lenguas y dialectos de la tierra hubiesen preservado tras una larga sucesión de edades tanto de común y universal si no estuviésemos seguros de la existencia de algún fundamento profundo de su concordancia en las leyes mismas de la mente.

2. Los elementos de que todo lenguaje se compone son signos o símbolos. Las palabras son signos. A veces se dice que representan cosas, otras las operaciones mediante las cuales la mente combina las nociones simples de las cosas en ideas complejas, otras que expresan las relaciones de acción, pasión o mera cualidad que captamos como existentes entre los objetos de nuestra experiencia, otras, finalmente, las emociones de la mente percipiente. Mas las palabras, aunque de éste y otros modos cumplan como signos, o símbolos representativos, no son los únicos signos que somos capaces de emplear. Señales arbitrarias que tan sólo hablan a la vista y sonidos o acciones arbitrarios que se dirigen a cualquier otro sentido, poseen igualmente la naturaleza de signo con tal que su papel de representantes sea definido y entendido. En las ciencias matemáticas las letras, y los símbolo + , −, = , etc. se utilizan como signos aunque el término "signo" se aplique a la segunda clase de símbolos que representan operaciones o relaciones antes que a la primera, que representa los elementos del número y la cantidad. Así como el sentido real de un signo no depende de ningún modo de su forma o expresión particulares, tampoco lo hacen las leyes que determinan su empleo. En el presente tratado, sin embargo, tenemos que habérnoslas con símbolos escritos, y el término "signo" se empleará con frecuencia a los mismos exclusivamente. Las propiedades esenciales de los signos se enumeran en la definición siguiente.

Definición: Un signo es una señal arbitraria, poseedora de una interpretación fija y susceptible de combinación con otros signos según leyes fijas dependientes de su interpretación mutua.

3. Consideremos separadamente los pormenores contenidos en la definición precedente.

(1). En primer lugar, un signo es una señal *arbitraria*. Sin duda es indiferente la palabra concreta o señal que asociamos con una idea determinada con tal que la vinculación, una vez realizada, sea permanente. Los romanos expresaban mediante la palabra "civitas" lo que nosotros designamos por la palabra "estado" (state). Pero tanto ellos como nosotros podríamos haber empleado cualquier otra palabra para representar la misma idea. Nada, ciertamente, en la naturaleza del lenguaje nos impediría usar una simple letra en idéntico sentido. Si esto se hiciera, las leyes según las cuales se requeriría que se usase dicha letra serían esencialmente las mismas que las que rigen el uso de "civitas" en latín y "state" en el idioma inglés, en la medida al menos en que el empleo de aquellas palabras es regulado por principios generales, comunes por igual a todas las lenguas.

(2). En segundo lugar, es menester que cada signo posea dentro de los límites del mismo discurso o proceso de razonamiento una interpretación fija. La necesidad de tal condición es obvia y parece fundarse en la misma naturaleza del asunto. Existe discusión, sin embargo, en lo referente a la naturaleza precisa del papel de representante de las palabras o símbolos usados como nombres en el proceso del razonamiento. Algunos mantienen que tan sólo representan las concepciones de la

mente, otros que representan cosas. La cuestión no posee gran importancia en este contexto, ya que lo que se decida en lo a ella referente no puede afectar a las leyes según las cuales se emplean los signos. Sospecho, sin embargo, que la respuesta general a esta cuestión y otras semejantes es que en los procesos de razonamiento los signos ocupan el lugar y hacen el oficio de las concepciones y operaciones de la mente; mas así como tales concepciones y operaciones representan cosas y las relaciones y conexiones entre cosas, los signos representan cosas y sus relaciones y conexiones, y, finalmente, que así como los signos ocupan el lugar de las concepciones y operaciones de la mente, se hallan sometidos a las leyes de tales concepciones y operaciones. Esta opinión se aclarará más ampliamente en el capítulo siguiente; mas aquí sirve para explicar el tercero de aquellos pormenores contenidos en la definición de signo, a saber, su sujeción a leyes fijas de combinación dependientes de la naturaleza de su interpretación.

4. El análisis y la clasificación de aquellos signos mediante los cuales se llevan a cabo las operaciones del razonamiento se considerarán en la siguiente Proposición:

PROPOSICION I

Todas las operaciones del lenguaje en tanto instrumento del razonamiento pueden llevarse a cabo merced a un sistema de signos compuesto de los siguientes elementos, a saber:

PRIMERO. Símbolos literales, como x, y, etc., que representan cosas en tanto objetos de nuestras concepciones.

SEGUNDO. Signos de operaciones, como $+, -, \times$, *que representan aquellas operaciones de la mente mediante las cuales se combinan o descomponen las concepciones de las cosas de tal modo que forman nuevas concepciones que contengan los mismos elementos.*

TERCERO. El signo de identidad $=$.

Y estos símbolos de la Lógica se hallan sometidos en su empleo a leyes definidas, en parte coincidentes, y en parte diferentes, de las leyes correspondientes a los símbolos en la ciencia del Algebra.

Asúmase como criterio de los verdaderos elementos del discurso racional que sean susceptibles de combinación en las formas más simples y mediante las leyes más simples, y que combinándose de ese modo originen todas las restantes formas conocidas y concebibles del lenguaje, y adoptando este principio, considérese la siguientes clasificación.

CLASE I

5. *Signos apelativos o descriptivos que expresen el nombre de una cosa o alguna cualidad o circunstancia que le corresponde.*

A esta clase podemos obviamente remitir el nombre propio o común y el adjetivo. Puede considerarse que estos últimos difieren tan sólo en que el primero expresa la existencia sustantiva de la cosa individual o cosas a que se refiere; y el segundo implica dicha existencia. Si unimos al adjetivo el sujeto universalmente entendido "ser" o "cosa", se convierte virtualmente en un sustantivo, pudiendo reemplazarse para todos los fines esenciales del razonamiento por el sustantivo. El que sea o no para la visión mental en todos los detalles equivalente decir "el agua es una cosa fluida" que decir "el agua es fluida", es por lo menos equivalente en la expresión de los procesos del razonamiento.

Está claro también que debemos remitir a la clase anterior cualquier signo que pueda usarse convencionalmente para expresar alguna circunstancia o relación cuya exposición incluiría el empleo de muchos signos. Los epítetos de la dicción poética son muy frecuentemente de este tipo. Son usualmente adjetivos compuestos que cumplen separadamente el papel de una descripción compuesta de muchas palabras. El "océano que se arremolina profundamente" de Homero está virtualmente incluido en la simple palabra βαθυδίνης. Y convencionalmente cualquier otra descripción dirigida ya a la imaginación ya al intelecto podría representarse por un simple signo cuyo uso se hallaría sometido en todos los aspectos esenciales a las mismas leyes a que se halla sometido el adjetivo "bueno" o "grande". Combinado con el sujeto "cosa". dicho signo se convertiría virtualmente en un sustantivo; y mediante un sólo sustantivo podría expresarse el significado combinado tanto de cosa como de cualidad.

6. Ahora bien, dado que un signo se ha definido como una señal arbitraria, es permisible reemplazar todos los signos del tipo anterior por letras. Convengamos, pues, en representar la clase de los individuos a que es aplicable un nombre determinado o una descripción por una simple letra como x. Si el nombre es "hombres", por ejemplo, hagamos que x represente "todos los hombres", o la clase "hombres". Por clase se entiende habitualmente una colección de individuos a cada uno de los cuales puede aplicarse un nombre determinado o una descripción, pero en esta obra el significado del término se ampliará hasta que pueda incluir el caso en que tan sólo un individuo exista, capaz de responder al nombre o descripción requeridos, así como los casos denotados por los términos "nada" y "universo", que en cuanto clases habrían de entenderse como compuestas de, respectivamente, "ningún ser", y "todos los seres". Además, si se aplica un adjetivo como "bueno" como término descriptivo, representemos por una letra como y, todas las cosas a que la descripción de "bueno" es aplicable, es decir, "todas las cosas buenas", o la clase "cosas buenas". Convengamos además en que por la combinación xy se representará aquella clase de cosas a la que los nombres o descripciones representados por x e y son simultáneamente aplicables. Así, si x aisladamente representa "cosas blancas" e y "ovejas", hagamos que xy represente "ovejas blancas"; y, parejamente, si z representa "cosas con cuernos" y x e y mantienen sus interpretaciones precedentes, hagamos que zxy represente "ovejas blancas con cuernos", es decir, aquel conjunto

de cosas a que son aplicables a un tiempo el nombre "ovejas" y las descripciones "blancas" y "con cuernos".

Consideremos ahora las leyes a que se hayan sujetos los símbolos x, y , etc., usados en el sentido anterior.

7. En primer lugar, es evidente que de acuerdo con las combinaciones precedentes el orden en que se escriban dos símbolos es indiferente. Las expresiones xy e yx representan igualmente aquella clase de cosas a cuyos varios miembros los nombres o descripciones x e y son igualmente aplicables. De aquí tenemos:

$$xy = yx. \qquad (1)$$

En el caso de que x represente cosas blancas e y ovejas, cualquiera de los miembros de esta ecuación representará la clase de "ovejas blancas". Puede que haya alguna diferencia en cuanto al orden en que se forma la concepción, mas no hay ninguna en cuanto a las cosas individuales que se contienen en ella. De igual manera, si x representa "estuarios" e y "ríos", las expresiones xy e yx representarán indiferentemente "ríos que son estuarios" o "estuarios que son ríos", siendo en el lenguaje ordinario en este caso, la combinación de dos sustantivos en vez de la de un sustantivo y un adjetivo como en el caso anterior. Hagamos que haga acto de presencia un tercer símbolo, como z, que represente aquella clase de cosas a que el término "navegable" es aplicable, y cualquiera de las siguientes expresiones:

$$zxy, \quad zyx, \quad xyz, \quad \&c.,$$

representará la clase de "ríos navegables que son estuarios". Si uno de los términos descriptivos tubiera alguna referencia implícita a algún otro, es necesario tan sólo incluir tal referencia expresamente en su significado establecido, a fin de que las anteriores consideraciones sigan siendo aplicables. Así, si x representa "sabio" e y "consejero", habremos de definir si x implica sabiduría en el sentido absoluto o sólo sabiduría en el consejo. Con tal definición la ley $xy = yx$ continúa siendo valida.

Nos es permitido, por tanto, emplear los símbolos x, y, z, etc., en lugar de sustantivos, adjetivos y expresiones descriptivas sujetos a la regla de interpretación según la cual cualquier expresión en que varios de estos símbolos aparezcan escritos juntos representará todos los objetos o individuos a los que son aplicables a la vez sus varios significados, y a la ley según la cual el orden en que los símbolos se siguen unos a otros es indiferente.

Como la regla de interpretación ha sido ejemplificada lo suficiente, estimaré innecesario expresar siempre el sujeto "cosas" al definir la interpretación de un símbolo usado para un adjetivo. Cuando digo: represente x "bueno" se entenderá que x sólo representa "bueno" cuando se ofrece un sujeto para tal cualidad mediante otro símbolo, y que, usado aisladamente, su interpretación será "cosas buenas".

8. En lo referente a la ley arriba señalada pueden añadirse las observaciones

siguientes, que serán también más o menos apropiadas a otras leyes a deducir más adelante.

En primer lugar, señalaría que esta Ley es una ley del pensamiento, y no, hablando con rigor, una ley de las cosas. La diferencia en el orden de las cualidades o atributos de un objeto, a parte de todo lo referente a la causalidad, es una diferencia que atañe tan sólo a la concepción. La ley (1) expresa en cuanto verdad general que la misma cosa puede concebirse de modos distintos y hace constar la naturaleza de esa diferencia; y no hace más que eso.

En segundo lugar, en cuanto ley del pensamiento se desarrolla de hecho en una ley del lenguaje, el producto e instrumento del pensamiento. Aunque la tendencia de la escritura en prosa sea hacia la uniformidad, no obstante, incluso en ella el orden de secuencia de los adjetivos, absolutos en su significado, y aplicados al mismo sujeto, es indiferente, pero la dicción poética toma prestado mucho de su rica diversidad de la existencia de la misma legítima libertad al sustantivo. El lenguaje de Milton se distingue muy singularmente por esta especie de diferencia. No sólo precede a menudo el sustantivo a los adjetivos por los que es cualificado, sino que con frecuencia va en medio de ellos. En las primeras pocas líneas de la invocación a la Luz, nos encontramos con ejemplos como los siguientes:

"*Descendencia del cielo primogénita*"

"El emergente mundo de *las aguas oscuras y profundas*"

"Brillante efluencia de la *brillante esencia increada*"

Ahora bien, estas formas invertidas no son tan sólo los frutos de una licencia poética. Son las expresiones naturales de una libertad sancionada por las leyes profundas del pensamiento, aunque no ejercidas por razones de conveniencia en el uso ordinario del lenguaje.

En tercer lugar, la ley expresada por (1) puede caracterizarse diciendo que los símbolos literales x, y, z, son *commutativos, como los símbolos del Algebra*. Al decir esto no se pretende afirmar que el proceso de multiplicación en Algebra, cuya ley fundamental se expresa por la ecuación

$$xy = yx, \qquad (1)$$

posea en sí mismo alguna analogía con aquel proceso de combinación lógica a que se ha hecho representar más arriba por xy, mas sólo que si el proceso lógico y el aritmético se expresan de igual modo sus expresiones simbólicas se verán sujetas a la misma ley formal. La evidencia de tal sujeción es en los dos casos completamente distinta.

9. Como la combinación de dos símbolos literales en la forma xy expresa el total de aquella clase de objetos a los que los nombres o cualidades representados por x e y son a un tiempo aplicables, síguese de ello que si los dos signos tienen

exactamente la misma significación su combinación no expresa más que cualquiera de los mismos tomado aisladamente. Tendríamos, por tanto, en tal caso:

$$xy = x.$$

Pero como y posee según hemos supuesto el mismo significado que x, podemos sustituirlo en la ecuación anterior por x, y obtenemos de este modo:

$$xx = x.$$

Ahora bien, en el Algebra común la combinación xx se representa más brevemente por x^2. Adoptemos aquí igual principio de notación, pues el modo de expresar una sucesión determinada de operaciones mentales es algo en sí mismo tan arbitrario como el modo de expresar una idea u operación simple (II.3). De acuerdo con esta notación la ecuación anterior asume, pues, la forma

$$x^2 = x, \qquad (2)$$

y es, de hecho, la expresión de una segunda ley general de aquellos símbolos mediante los cuales los nombres, las cualidades o las descripciones se representan simbólicamente.

El lector debe tener en cuenta que, aunque los símbolos x e y en los ejemplos anteriores recibieron significaciones diferentes entre sí, nada nos impide atribuirles precisamente la misma significación. Es evidente que cuanto más ceñidamente se aproximen sus significados efectivos, más se aproxima a la identidad la clase de cosas denotada por la combinación xy con la clase denotada por x, así como por la denotada por y. El caso supuesto en la demostración de la ecuación (2) es el de identidad *absoluta* de significado. La ley que expresa se ejemplifica prácticamente en el lenguaje. Decir "bueno, bueno" en relación con algún asunto, si bien es un desmañado e inútil pleonasmo, es lo mismo que decir "bueno". Así, hombres "buenos, buenos" es equivalente a hombres "buenos". Repeticiones tales de palabras se emplean, ciertamente, a veces a fin de ensalzar una cualidad o reforzar una afirmación. Pero este efecto es sólo secundario y convencional; no se funda en las relaciones intrínsecas del lenguaje y del pensamiento. La mayor parte de las operaciones que observamos en la naturaleza o realizamos nosotros mismos son de un tipo tal que su efecto se ve aumentado por la repetición y tal circunstancia nos prepara para esperar igual resultado en el lenguaje e incluso para usar la repetición cuando pretendemos hablar con énfasis. Mas ni en el razonamiento estricto ni en el discurso exacto se da un fundamento justo para tal práctica.

10. Pasamos ahora a la consideración de otra clase de signos lingüísticos, y de las leyes que hacen relación a su uso.

CLASE II

11. *Signos de aquellas operaciones mentales mediante las cuales reunimos partes en todos o separamos todos en sus partes.*

No somos sólo capaces de considerar las concepciones de objetos caracterizados por nombres, cualidades o circunstancias aplicables a cada individuo del grupo que se tiene en cuenta, sino de formar también la concepción compuesta de un grupo de objetos que se compone de grupos parciales, siendo cada uno de los cuales nombrado o descrito por separado. A este fin usamos las conjunciones "y", "o", etc. "Arboles y minerales" y "áridas montañas o valles fértiles", son ejemplos de este tipo. En rigor, las palabras "y", "o", interpuestas entre los términos descriptivos de dos o más clases de objetos, implican que tales clases son completamente distintas, de tal modo que ningún miembro de una se halla en la otra. En este y en todos los demás respectos las palabras "y", "o" son análogas al signo + en Algebra, y sus leyes son idénticas. Así, la expresión "hombres y mujeres" es, dejando a un lado los significados convencionales, equivalente a la expresión "mujeres y hombres". Hagamos que x represente "hombres", y, "mujeres"; y+"y" *u* "o", *y tenemos*

$$x + y = y + x, \tag{3}$$

una ecuación que mantendría su verdad si x e y representasen *números* y + fuese el signo de adición aritmética.

Hagamos que el símbolo z represente el adjetivo "europeo"; entonces, dado que es efectivamente lo mismo decir "hombres y mujeres europeos" que "hombres europeos y mujeres europeas", tenemos

$$z\,(x + y) = zx + zy. \tag{4}$$

y esta ecuación sería igualmente verdadera si fueran x, y, z, símbolos numéricos y representase la yuxtaposición de dos símbolos literales su producto algebraico, así como en la significación lógica anteriormente dada representa la clase de objetos a que corresponden ambos epítetos conjuntados.

Las leyes anteriores son las que gobiernan el uso del signo + empleado aquí para denotar la operación positiva de agregar partes y formar un todo. Pero la misma idea de una operación que efectúa un cambio parece sugerirnos la idea de una operación opuesta o negativa que posea el efecto de deshacer lo que la anterior ha hecho. Así, no podemos concebir la posibilidad de unir partes para formar un todo sin concebir asimismo la posibilidad de separar una parte de un todo. Esta operación la expresamos en el lenguaje común mediante el signo *excepto*, como "todos los hombres *excepto* los asiáticos", "todos los estados *excepto* las monarquías". Aquí se halla implicado que las cosas exceptuadas forman una parte de las cosas de que se exceptúan. Así como hemos expresado la operación de agregación mediante el signo + , podemos expresar la operación negativa arriba descrita por−, menos. De este

modo, si x representa hombres e y asiáticos, es decir, hombres asiáticos, la concepción de "todos los hombres excepto los asiáticos" se expresará por $x - y$. Y si representamos por x "estados", y por y la propiedad descriptiva "tener forma monárquica", entonces la concepción de "todos los estados excepto las monarquías" se expresará por $x - xy$.

Así como es indiferente para todos los propósitos *esenciales* del razonamiento el que se expresen los casos que se exceptúan al principio o al final en el orden del habla, también lo es el orden en que escribimos cualquier serie de términos, algunos de los cuales estén afectados por el signo —. De este modo tenemos, como en el Algebra común:

$$x - y = - y + x. \tag{5}$$

Representando aún por x la clase "hombres" y por y "asiáticos". hagamos que z represente el adjetivo "blanco". Ahora bien, aplicar el adjetivo "blanco" al conjunto de hombres referido por la expresión "hombres excepto asiáticos" es lo mismo que decir "hombres blancos excepto asiáticos blancos". De aquí tenemos:

$$z\,(x - y) = zx - zy. \tag{6}$$

Esta expresión concuerda asimismo con las leyes del Algebra ordinaria.

Las ecuaciones (4) y (6) pueden considerarse como ejemplificación de una única ley general que puede expresarse diciendo *que los símbolos literales x, y, z, etc., son distributivos en su operación*. El hecho general que esta ley expresa es este, a saber: si alguna cualidad o circunstancia se adscribe a todos los miembros de un grupo formado ya por agregación, ya por exclusión de grupos parciales, la concepción resultante es la misma que si la cualidad o circunstancia se adscribiese primero a cada miembro de los grupos parciales y la agregación o exclusión se efectuase después. Lo que se adscribe a los miembros del todo se adscribe a los miembros de todas sus partes, cualquiera que sea el modo en que aquellas partes se vinculen entre sí.

CLASE III

12. *Signos mediante los cuales se expresa una relación, y merced a los cuales formamos proposiciones.*

Aunque todos los verbos pueden remitirse legítimamente a esta clase, es suficiente para los propósitos de la Lógica considerar dicha clase como contenedora tan sólo del verbo sustantivo *es* o *son*, dado que todo otro verbo puede convertirse en este elemento y uno de los signos incluidos en la clase I. Pues así como aquellos signos se utilizan para expresar cualidad o circunstancia de todo tipo, pueden emplearse para expresar la relación activa o pasiva del sujeto del verbo, considerado en referencia o al pasado o al presente, o al tiempo futuro. Así, la proposición

"César conquistó las Galias" puede convertirse en "César es quien conquistó las Galias". El fundamento de este análisis estimo que es el siguiente: a no ser que entendamos lo que significa haber conquistado las Galias, es decir, la expresión "Uno que conquistó las Galias", no podemos entender la frase en cuestión. Es, por tanto, verdaderamente un elemento de esa frase; otro elemento es "César", y se requiere aún otro, la cópula *es*, para mostrar la conexión de estos dos. No afirmo, sin embargo, que no exista otro modo que el anterior de contemplar la relación expresada por la proposición "César conquistó las Galias"; sino tan sólo que el análisis dado aquí es correcto para el punto de vista particular que se ha adoptado y que basta para las líneas de la deducción lógica. Puede hacerse notar que los participios pasivos y futuros del idioma griego implican la existencia de lo que se ha afirmado, a saber: que el signo *es* o *son* puede considerarse como un elemento de todo verbo personal.

13. El signo anterior *es* o *son* puede expresarse por el símbolo =. Las leyes, o, como usualmente se diría, los axiomas que el símbolo introduce se considerarán a continuación.

Tomemos la proposición "Las estrellas son los soles y los planetas", y representemos estrellas por x, soles por y y planetas por z, y tenemos:

$$x = y + z. \tag{7}$$

Ahora bien, si es cierto que las estrellas son los soles y los planetas, se seguirá de ello que las estrellas, excepto los planetas, son soles. Esto daría la ecuación

$$x - z = y, \tag{8}$$

que debe, por tanto, deducirse de (7). De este modo un término z ha sido pasado de un lado de la ecuación al otro, mediante un cambio de signo. Esto se halla en concordancia con la regla algebraica de la trasposición.

Pero en vez de insistir en casos concretos podemos afirmar de inmediato los siguientes axiomas:

PRIMERO. Si cosas iguales se añaden a cosas iguales, los todos son iguales.

SEGUNDO. Si se separan cosas iguales de cosas iguales, los restos son iguales.

Se patentiza de este modo que podemos sumar o sustraer ecuaciones y emplear la regla de trasposición dada más arriba como en el Algebra común.

Además: si dos clases de cosas x e y son idénticas, esto es, si todos los miembros de una son miembros de la otra, entonces aquellos miembros de una de las clases que poseen la propiedad z serán idénticos a aquellos miembros de la otra que poseen la misma propiedad z. De aquí que si tenemos la ecuación

$$x = y\ ;$$

sea cual sea la clase o propiedad que z represente, tenemos también

$$zx = zy.$$

Esta última expresión es formalmente igual a la ley algebraica: si ambos miembros de una ecuación se multiplican por la misma cantidad los productos son iguales.

De modo similar puede mostrarse que si los miembros correspondientes de dos ecuaciones son multiplicados uno por otro, la ecuación resultante es verdadera.

14. En este punto, sin embargo, la analogía del sistema presente con el del Algebra, tal y como se expresa habitualmente, parece detenerse. Supóngase verdadero que aquellos miembros de una clase x que poseen una cierta propiedad z son idénticos a aquellos miembros de una clase y que poseen la misma propiedad z; de ello no se sigue que los miembros de la clase x sean universalmente idénticos a los miembros de la clase y. Por ello, de la ecuación

$$zx = zy,$$

no se puede inferir que la ecuación

$$x = y$$

sea también verdadera. En otras palabras, el axioma de los algebristas según el cual ambos miembros de una ecuación pueden dividirse por la misma cantidad no posee equivalente formal en nuestro caso. Digo *equivalente formal* porque, de acuerdo con el espíritu formal de estas investigaciones ni siquiera se busca determinar si la operación mental representada por la eliminación de un símbolo lógico z a partir de una combinación zx es en sí misma análoga a la operación de la división aritmética. Tal operación mental es ciertamente idéntica a lo que es habitualmente denominado abstracción, y se verá después que sus leyes dependen de las leyes ya deducidas en este capítulo. Lo que se ha mostrado ahora es que no existe entre aquellas leyes nada análogo en cuanto a la *forma* a un axioma generalmente admitido en Algebra.

Mas una consideración somera de la cuestión hará patente que incluso en el Algebra común aquel axioma no posee la generalidad de aquellos otros que hemos considerado. La deducción de la ecuación $x = y$ a partir de la ecuación $zx = zy$ es sólo válida cuando se sabe que z no es igual a 0. Si se supone el valor $z = 0$ admisible en el sistema algebraico, el axioma arriba establecido cesa de ser aplicable y la analogía antes ejemplificada permanece por lo menos intacta.

15. Sin embargo, no es con los símbolos de la cantidad en general por lo que es de importancia, salvo en cuanto pura especulación, rastrear afinidades tales. Hemos visto (II.9) que los símbolos de la Lógica están sometidos a la ley especial:

$$x^2 = x.$$

Ahora bien, de entre los símbolos numéricos tan sólo dos, a saber, 0 y 1, se hallan sometidos a la misma ley formal. Sabemos que $0^2 = 0$, y que $1^2 = 1$, y la ecuación

$x^2 = x$, considerada algebraicamente, no tiene más raices que 0 y 1. De aquí que en vez de determinar la medida de concordancia formal entre los símbolos de la Lógica y los del número en general, se nos sugiera de modo más inmediato compararlos con los símbolos de la cantidad, *admitiendo sólo los valores 0 y 1*. Pensemos, pues, en un Algebra en que los símbolos x, y, z, etc. admitan indiferentemente los valores 0 y 1, y sólo estos valores. Las leyes, los axiomas y los procesos de un Algebra tal serán idénticos en todo su alcance a las leyes, los axiomas y los procesos de un Algebra de la Lógica. Tan sólo una diferencia de interpretación los dividirá. Sobre este principio se establece el método del siguiente trabajo.

16. Queda ahora por anotar que aquellas partes constitutivas del lenguaje ordinario que no se han considerado en las secciones previas de este capítulo pueden ora reducirse a los elementos que ya se han considerado, o son subsidiarias de aquellos elementos en cuanto constribuyen a su definición precisa. Ya hemos considerado el sustantivo, el adjetivo y el verbo, junto con las partículas *y*, *excepto*. El pronombre puede considerarse como una forma particular del sustantivo o el adjetivo. El adverbio modifica el significado del verbo, mas no afecta a su naturaleza. Las preposiciones constribuyen a la expresión de la circunstancia o la relación, tendiendo así a precisar y detallar el significado de los símbolos literales. Las conjunciones *si*, *o*, se usan principalmente en la expresión de relación entre proposiciones, y se mostrará más adelante que las mismas relaciones pueden expresarse completamente mediante símbolos elementales análogos en cuanto a la interpretación e idénticos en la forma y la ley a los símbolos cuyo uso y significado se ha explicado en este capítulo. En lo referente a los restantes elementos del lenguaje se hallará al examinarlos que se usan para otorgar un significado más definido a los términos del discurso, entrando de este modo en la interpretación de los símbolos literales ya considerados, o para expresar alguna emoción o estado emocional que acompañe a la expresión de una proposición, no perteneciendo por tanto al ámbito del entendimiento, el único a que nuestro actual interés se dirige. La experiencia de su uso testificará a favor de la suficiencia de la clasificación adoptada.

CAPITULO III

DERIVACION DE LAS LEYES DE LOS SIMBOLOS DE LA LOGICA A PARTIR DE LAS LEYES DE LAS OPERACIONES DE LA MENTE HUMANA

1. El objeto de la ciencia propiamente dicha es el conocimiento de leyes y relaciones. Ser capaz de distinguir lo que es a este fin esencial de lo que está sólo accidentalmente vinculado al mismo es una de las condiciones más importantes del progreso científico. Digo *distinguir* entre estos elementos, porque una devoción a la ciencia no precisa que la atención se aparte enteramente de otras especulaciones, a menudo de naturaleza metafísica, con que de modo no infrecuente se conecta. Cuestiones tales, por ejemplo, como las referentes a la existencia de un fundamento que sustente los fenómenos, la realidad de la causa, la corrección de las formas del lenguaje que implican que los estados sucesivos de las cosas están conectadas por *operaciones*, y otras de tipo similar, pueden poseer un profundo interés y significado en relación a la ciencia sin ser esencialmente científicas. Es en verdad apenas posible expresar las conclusiones de la ciencia natural sin tomar prestado el lenguaje de estas concepciones. Y no surge necesariamente ninguna incongruencia práctica de esta fuente. Aquellos que creen y aquellos que se niegan a creer que hay algo más en la relación de causa y efecto que un orden invariable de sucesión, están conformes en la interpretación de las conclusiones de la astronomía física. Pero sólo están conformes porque reconocen un elemento común de verdad científica que es independiente de sus opiniones particulares en lo atañedero a la naturaleza de la causalidad.

2. Si esta distinción es importante en la ciencia física, mucho más merece atención en lo referente a la ciencia de los poderes intelectuales. Pues las cuestiones que esta ciencia presenta se mezclan, en su expresión al menos, casi necesariamente con modos de pensamiento y lenguaje que delatan un origen metafísico. El idealista daría a las leyes del razonamiento una expresión particular; el escéptico, si es fiel a sus principios, otra. Aquellos que consideran los fenómenos de que nos ocupamos en esta investigación como meros *estados* sucesivos del sujeto pensante carentes de toda conexión causal, y los que los refieren a las *operaciones* de una inteligencia activa, diferirían, igualmente, si se comportasen consecuentemente en los modos de

exposición. Igual diferencia resultaría también a partir de una diferencia en la clasificación de las facultades mentales. Ahora bien, el principio que haría valer aquí en tanto que nos otorga la única base de confianza y estabilidad entre tanta diversidad real y aparente, es el siguiente, a saber, que si las leyes en cuestión son deducidas realmente a partir de la observación, poseen una existencia real en cuanto leyes de la mente humana con independencia de cualquier teoría metafísica que parezca hallarse contenida en el modo de su exposición. Contienen un elemento de verdad que ningún criticismo ulterior referente a la naturaleza, o incluso a la realidad, de las operaciones de la mente puede afectar esencialmente. Concédase incluso que la mente no es más que una sucesión de estados de conciencia, una serie de impresiones pasajeras sin causa exterior o interior, emergentes de la nada y que vuelven de nuevo a la nada —último refinamiento del intelecto escéptico—, pues bien, los resultados a que la observación nos ha conducido continuarían siendo verdaderos en cuanto leyes de la sucesión, o al menos de la sucesión pasada. Requerirían interpretarse en un lenguaje cuyo vocabulario hubiese sido desprovisto de todos los términos del jaez de causa y efecto, operación y sujeto, sustancia y atributo; mas serían válidos aún en cuanto verdades científicas.

Además, como cualquier exposición de las leyes del pensamiento fundada sobre la observación efectiva debe así contener elementos científicos independientes de teorías metafísicas referentes a la naturaleza de la mente, la aplicación práctica de tales elementos a la construcción de un sistema o método de razonamiento debe asimismo ser independiente de distinciones metafísicas. Pues cualquier aplicación práctica descansará sobre los elementos científicos contenidos en la exposición de las leyes, de modo parejo a como las conclusiones prácticas de la astronomía física son independientes de cualquier teoría referente a la causa de la gravitación y descansan tan sólo sobre el conocimiento de sus efectos fenoménicos. Y, por tanto, en lo que respecta tanto a la determinación de las leyes del pensamiento cuanto a su uso práctico una vez descubiertas, no nos vemos afectados, en lo que atañe a los fines realmente científicos, por la verdad o la falsedad de cualesquiera especulaciones metafísicas.

3. El rumbo que me parece conveniente adoptar en estas circunstancias es valerme en la medida de lo posible del lenguaje del discurso común sin consideración alguna de ninguna teoría referente a la naturaleza y poderes de la mente que pueda pensarse que lleva incorporada. Es, por ejemplo, conforme al uso común decir que conversamos unos con otros mediante la comunicación de ideas o concepciones, siendo el oficio de las palabras el permitir tal comunicación, y que con referencia a cualesquiera ideas o concepciones particulares que se le presenten posee la mente ciertos poderes o facultades merced a los cuales la mirada mental puede fijarse sobre ciertas ideas con exclusión de otras o mediante los cuales las ideas o concepciones dadas pueden, de diversas maneras, combinarse entre sí. A tales facultades o poderes se les ha dado diferentes nombres, tales como atención, simple aprehensión, concepción o imaginación, abstracción, etc., nombres que no sólo han proporcionado los títulos de diferentes distinciones de la teoría de la mente huma-

na sino que han pasado al lenguaje corriente de los hombres. Así pues, cuando quiera que la ocasión se presente de usar tales términos lo haré sin que ello implique que acepto la teoría de que la mente posee tales y tales poderes y facultades en tanto elementos separables de su actividad. Tampoco es ciertamente necesario investigar si tales poderes del entendimiento poseen o no una existencia inequívoca. Podemos fundir estos títulos diferentes bajo el nombre genérico de *operaciones* de la mente humana, definir tales operaciones en la medida en que sea necesario para los fines de esta obra, e intentar a continuación expresar sus leyes últimas. Tal será el orden general del rumbo que seguiré, aunque haré referencia ocasionalmente a los nombres que el acuerdo común ha asignado a los estados u operaciones particulares de la mente de que podemos tener noticia.

Será muy conveniente distribuir los resultados más concretos de la investigación siguiente en proposiones distintas.

PROPOSICION I

4. *Para deducir las leyes de los símbolos de la Lógica a partir de una consideración de aquellas operaciones de la mente que están implicadas en el uso estricto del lenguaje como instrumento del razonamiento.*

En todo discurso, ya sea de la mente en conversación con sus propios pensamientos, o del individuo en su relación con otros, se da un límite, asumido o expresado, dentro del cual los asuntos de su operación se hallan confinados. El discurso más destrabado es aquel en que las palabras que usamos se entienden en la más amplia aplicación y cuyos límites son coextensivos a los del universo mismo. Pero más corrientemente nos limitamos a un ámbito menos amplio. A veces, al hablar de los hombres presuponemos (sin expresar la limitación) que hablamos tan sólo de los hombres bajo ciertas circunstancias y condiciones, como cuando lo hacemos de hombres civilizados, o de hombres en pleno vigor vital, o de hombres considerados desde otra condición o relación. Ahora bien, cualquiera que sea el alcance del ámbito en que se hallan todos los objetos de nuestro dircurso, dicho ámbito puede llamarse con toda propiedad el universo del discurso.

5. Además, este universo del discurso es en el sentido más estricto el *asunto* último del discurso. El oficio de cualquier nombre o término descriptivo empleado con las limitaciones supuestas no es hacer aparecer en la mente la concepción de todos los seres u objetos a que tal nombre o descripción es aplicable, sino sólo la de aquellos que existen dentro del supuesto universo del discurso. Si tal universo del discurso es el efectivo universo de las cosas, que siempre lo es cuando nuestras palabras se toman en su sentido real y literal, entonces por hombres queremos significar *todos los hombres existentes;* pero si el universo del discurso es limitado por cualquier acuerdo antecedente y presupuesto, entonces hablamos de los hombres con la limitación así introducida. Es en ambos casos asunto de la palabra *hombres* dirigir una cierta operación de la mente mediante la cual, a partir del universo propio del discurso, seleccionamos o escogemos los individuos significados.

6. Exactamente del mismo tipo es la operación mental involucrada en el uso de un adjetivo. Sea, por ejemplo, el universo del discurso el universo tal y como es en la actualidad. Entonces, así como la palabra "hombres" nos conduce a seleccionar mentalmente de tal universo todos los seres a los que el término "hombres " es aplicable, así también el adjetivo "bueno", en la combinación "hombres buenos" nos lleva aún más lejos, a seleccionar mentalmente a partir de la clase de los *hombres* a todos aquellos que poseen además la cualidad de "buenos", y si se antepusiese otro adjetivo a la combimación "hombres buenos" conduciría aún otra operación de la misma naturaleza que hiciese referencia a esa otra cualidad que se eligiese y fuera expresada por él.

Es importante reparar con todo cuidado en lo referente a la naturaleza real de la operación aquí descrita, pues es concebible que hubiese podido ser diferente de lo que es. Si el adjetivo fuera simplemente *atributivo* en su naturaleza, parecería que cuando un conjunto determinado de seres es designado por "hombres", el anteponer el adjetivo *bueno* nos llevaría a unir mentalmente a todos aquellos seres la cualidad de la bondad. Pero no es este el oficio real del adjetivo. La operación que realmente llevamos a cabo es de *selección según un principio o idea prescrito*. A cuáles facultades de la mente habría que referir tal operación según la usual clasificación de sus poderes, no es cuestión cuya investigación importe, pero supongo que se considerará dependiente de las dos facultades de la concepción o imaginación y la atención. A una de estas facultades puede remitirse la formación de la concepción general; a la otra el fijar de la mirada mental en aquellos individuos que, hallándose dentro del universo del discurso prescrito, responden a la concepción. Si, sin embargo, como no parece improbable, el poder de la atención no es más que el poder de continuar el ejercicio de cualquier otra facultad de la mente, podríamos considerar correctamente todo el proceso arriba descrito como referible a la facultad mental de la imaginación o concepción, siendo el primer paso del proceso la concepción del universo mismo, y cada paso subsiguiente la limitación de un modo claro de la concepción así formada. Adoptando esta opinión describiré cada uno de esos pasos, o cualquier combinación definida de tales pasos, como un *acto concreto de concepción*. Y extenderé el empleo de este término de tal modo que incluya en su significado no sólo la concepción de clases de objetos representados por nombres determinados o simples atributos de cualidad, sino asimismo la combinación de tales concepciones en forma acorde con los poderes y limitaciones de la mente humana; cualquier operación intelectual en verdad que esté incluida en la estructura de un enunciado o proposición. Las leyes generales a que se someten tales operaciones de la mente las consideraremos a continuación.

7. Ahora bien, se mostrará que las leyes que en el capítulo precedente se han determinado *a posteriori* a partir de la constitución del lenguaje para el uso de los símbolos literales de la Lógica son en realidad las leyes de aquella concreta operación mental que se acaba de describir. Comenzamos nuestro discurso con una cierta comprensión relativa a los límites del asunto de que se trata, es decir, a los límites de su universo. Todo nombre, todo término descriptivo que empleamos conduce a

quien nos dirigimos a la realización de una cierta operación mental sobre dicho sujeto. Y es así como se comunica el pensamiento. Pero como cada nombre o término descriptivo es según esta consideración sólo el representante de una operación intelectual, siendo dicha operación anterior en el orden de la naturaleza, es claro que las leyes del nombre o símbolo deben ser de carácter derivado, han de originarse de hecho en aquellas de la operación que representan. Que las leyes del símbolo y las del proceso mental son idénticos en su expresión se mostrará a continuación.

8. Supongamos pues que el universo de nuestro discurso es el universo en su totalidad, de tal modo que las palabras se usen en toda la extensión de su significado, y consideremos las dos operaciones mentales implicadas por las palabras "blancos" y "hombres". La palabra "hombres" implica la operación de seleccionar en el pensamiento de su objeto, el universo, a todos los hombres, convirtiéndose la concepción resultante *hombres* en objeto de la operación siguiente. La operación involucrada en la palabra "blancos" es la de seleccionar de su objeto, hombres, todos los que pertenecen a esa clase y son blancos. La concepción final resultante es la de "hombres blancos". Ahora bien, es patente que si las operaciones arriba descritas se hubiesen llevado a cabo en un orden opuesto, el resultado habría sido el mismo. Que empecemos por formar la concepción de "hombres" y a continuación, merced a un segundo acto intelectual limitemos dicha concepción para llegar a "hombres blancos" o que partamos de la concepción de "objetos blancos" y la limitemos a continuación para llegar a los miembros de dicha clase que son hombres, resulta perfectamente indiferente en lo que concierne al resultado. Es obvio que el orden de los procesos mentales sería igualmente indiferente si en vez de las palabras "blancos" y "hombres" empleásemos cualesquiera otros términos descriptivos o apelativos a condición tan sólo de que su significado fuese fijo y absoluto. Y así, la indiferencia del orden de dos actos sucesivos de la facultad de la concepción, en que uno provee el objeto sobre el que el otro se supone que opera, es una condición general del ejercicio de esa facultad. Se trata de una Ley de la mente, origen genuino de aquella ley de los símbolos literales de la Lógica que constituye su expresión formal (1) capítulo II.

9. Es igualmente claro que la operación mental arriba descrita es de una naturaleza tal que su efecto no se altera mediante la repetición. Supongamos que merced a un acto concreto de concepción se ha fijado la atención sobre los hombres y que por otro ejercicio de la misma facultad nos limitamos a aquellos que son blancos. Entonces cualquier repetición posterior del último acto mental mediante el cual se limita la atención a los objetos blancos en ningún modo modifica la concepción a que se ha llegado, a saber, la de los hombres blancos. Este es asimismo un ejemplo de una ley general de la mente y posee su expresión formal en la ley (2) capítulo II) de los símbolos literales.

10. Además, es manifiesto que partiendo de la concepción de dos clases diferenciadas de cosas podemos formar la concepción de aquella colección de cosas que

ambas clases tomadas a la par forman, y es obviamente indiferente en qué orden de posición o de prioridad se presenten dichas clases a la mirada mental. Esta es otra ley general de la mente y su expresión se halla en (3) capítulo II.

11. No es necesario seguir adelante con este tipo de comparaciones. Se ha dado ya ejemplificación suficiente para hacer manifiestas las dos tesis siguientes, a saber:

PRIMERO: que las operaciones de la mente merced a las cuales en el ejercicio de su poder de imaginar o concebir combina o modifica las ideas simples de cosas o cualidades, no menos que aquellas operaciones de la razón que se ejercitan sobre verdades y proposiciones, se hallan sometidas a leyes generales.

SEGUNDO: que esas leyes son matemáticas en la forma, y que de hecho se muestran en las leyes esenciales del lenguaje humano. Por lo cual las leyes de los símbolos de la Lógica son deducibles a partir de una consideración de las operaciones de la mente al razonar.

12. En lo restante de este capítulo nos ocuparemos de cuestiones que guardan relación con aquella ley del pensamiento cuya expresión es $x^2 = x$ (II9), ley que como se ha hecho ya notar (II.15). constituye la distinción característica de las operaciones de la mente en su discurso y razonamiento ordinarios en comparación con sus operaciones cuando se ocupa con el Algebra general de la cantidad. Una parte importante de la investigación subsecuente consistirá en probar que los símbolos 0 y 1 tienen un lugar y son susceptibles de interpretación entre los símbolos de la Lógica; y puede ser necesario, en primer lugar, mostrar cómo símbolos particulares, tales como los anteriores, pueden, legítima y provechosamente, emplearse en la representación de sistemas distintos de pensamiento.

El fundamento de esta legitimidad no puede hallarse en ninguna comunidad de interpretación. Pues en sistemas de pensamiento en verdad tan distintos como los de la Lógica y la Aritmética (uso este último término en su sentido más amplio, entendido como ciencia del número) no se da, hablando con propiedad, comunidad temática. Uno de ellos versa sobre la concepción misma de las cosas, el otro toma tan sólo nota de sus relaciones numéricas. Mas, puesto que las formas y los métodos de cualquier sistema de razonamiento dependen inmediatamente de las leyes a que los símbolos se someten, y sólo mediatamente, a través del vínculo conectivo susomentado, de su interpretación pueden darse legitimidad y provecho en emplear los mismos símbolos en diferentes sistemas de pensamiento con tal que tales interpretaciones puedan conferírseles de tal modo que hagan sus leyes formales idénticas y su empleo consecuente. El fundamento de tal empleo no será, pues, comunidad de interpretación sino comunidad en las leyes formales a que en sus respectivos sistemas se hallan sometidos. Tampoco debe establecerse tal comunidad de legalidad formal sobre una base distinta de la observación cuidadosa y la comparación de aquellos resultados que se ven emanar con independencia de las interpretaciones de los sistemas considerados.

Estas observaciones explicarán el proceso de investigación adoptado en la proposición siguiente. Los símbolos literales de la Lógica se hallan universalmente sometidos a la ley cuya expresión es $x^2 = x$. De entre los símbolos numéricos sólo hay dos, 0 y 1, que satisfagan esta ley. Pero cada uno de estos símbolos se halla asimismo sometido a una ley peculiar asimismo en el sistema de la magnitud numérica, y esto sugiere la investigación de cuál sea la interpretación que haya de darse a los símbolos literales de la Lógica a fin de que las mismas leyes formales propias puedan realizarse también en el sistema lógico.

PROPOSICION II

13. *Para determinar el valor lógico y la significación de los símbolos 0 y 1.*

El símbolo 0, tal como se usa en Algebra, satisface la siguiente ley formal:

$$0 \times y = 0, \text{ o } 0y = 0, \qquad (1)$$

sea cual sea el *número* y. Para que esta ley formal pueda ser obedecida en el sistema de la Lógica hemos de asignar al símbolo 0 una interpretación tal que la *clase* representada por $0y$ pueda ser idéntica a la clase representada por 0, sea cual sea la clase y. Una somera consideración de la cuestión mostrará que tal condición se satisface si el símbolo 0 representa Nada. De acuerdo con una definición previa podemos llamar a Nada una clase. De hecho, Nada y Universo son los dos límites de la extensión de una clase, pues son los límites de las interpretaciones posibles de los nombres generales,, ninguno de los cuales puede referirse a menos individuos que los que Nada contiene, o a más de los contenidos en el Universo. Ahora bien, cualquiera que sea la clase y, los elementos contenidos a un tiempo en ella y en la clase "Nada" son idénticos a los contenidos en la clase "Nada", pues son ninguno. Y de este modo, al asignar a 0 la interpretación de Nada, se satisface la ley (1); y no es satisfecha de otro modo consecuentemente con el carácter perfectamente general de la clase y.

En segundo lugar, el símbolo 1 satisface en el sistema numérico la siguiente ley, a saber:

$$1 \times y = y, \text{ o } 1y = y,$$

sea cual sea el número que y represente. Y asumiendo como igualmente válida esta ecuación formal en el sistema de esta obra, en que 1 e y representan clases, es manifiesto que el símbolo 1 ha de representar que todos los individuos que se hallen en *cualquier* clase y propuesta sean también los individuos $1y$ contenidos a un tiempo en esa clase y en la representada por 1. Una somera consideración de la cuestión mostrará que la clase representada por 1 ha de ser "el Universo", pues es esta la única clase en que se hallan *todos* los individuos que existen en *cualquier* clase. De aquí, pues, que las interpretaciones respectivas de los símbolos *0* y 1 en el sistema de la Lógica sean *Nada* y *Universo.*

14. Dado que partiendo de la idea de cualquier clase de objetos como "hombres " sugiéresele a la mente la idea de la clase contraria de los seres que no son hombres, y dado que todo el Universo se compone de estas dos clases, pues de todo individuo que contiene podemos afirmar o que es un hombre o que no es un hombre, es importante investigar cómo han de expresarse tales nombres contrarios. Tal es el objeto de la proposición siguiente.

PROPOSICION III

Si x representa cualquier clase de objetos, 1 − x representará entonces la clase contraria o suplementaria de objetos, es decir, la clase que contenga todos los objetos que no se hallan en la clase x.

Para una mayor precisión en la concepción, hagamos que x represente la clase *hombres*, y representemos, de acuerdo con la última proposición, el Universo por 1; si ahora, a partir de la concepción del Universo como compuesto por "hombres" y "no hombres" excluímos la concepción de "hombres", la concepción que resulta es la de la clase contraria "no hombres". De aquí que la clase "no hombres" se representará por 1 − x. Y, en general, cualquiera que sea la clase de objetos representada por el símbolo x, la clase contraria se expresará mediante 1 − x.

Aunque la siguiente proposición corresponda en rigor a un capítulo futuro de esta obra consagrada al tema de las *máximas o verdades necesarias*, sin embargo, debido a la gran importancia de esa ley del pensamiento a que hace referencia, se ha pensado que resultaba adecuado introducirla aquí.

PROPOSICION IV

Aquel axioma de los metafísicos que se denomina principio de contradicción y que afirma que es imposible para cualquier ser poseer una cualidad y a un tiempo no poseerla es consecuencia de la ley fundamental del pensamiento cuya expresión es $x^2 = x$.

Escribamos esta ecuación en la forma

$$x - x^2 = 0,$$

de donde se obtiene

$$x(1 - x) = 0; \qquad (1)$$

siendo ambas transformaciones justificadas por las leyes axiomáticas de la combinación y la trasposición (II.13). Demos, a fin de conseguir mayor simplicidad de concepción, al símbolo x la interpretación particular *hombres*; entonces 1 − x representará la clase "no–hombres" (Prop. III). Ahora bien, el producto formal de las expresiones de dos clases representa aquella clase de individuos comunes a ambas (II.6). De aquí que x(1 − x) haya de representar la clase cuyos miembros son a la

par "hombres" y "no–hombres", y la ecuación (1) expresa así el principio de que *una clase cuyos miembros sean a la vez hombres y no–hombres no existe*. En otras palabras, que *es imposible para el mismo individuo ser a un tiempo hombre y no–hombre*. Ampliemos ahora el significado del símbolo x de tal modo que pase de representar "hombres" a representar cualquier clase de seres caracterizados por la posesión de una cualidad cualquiera, y la ecuación (1) expresará entonces que es imposible para un ser poseer una cualidad y no poseerla a un tiempo. Mas esto es aquel "principio de contradicción" que Aristóteles ha caracterizado como el axioma fundamental de toda Filosofía. "Es imposible que la misma cualidad tanto corresponda como no corresponda a la misma cosa. Este es el más cierto de todos los principios. Por lo que quienes demuestran se remiten a él como a una opinión última. Pues es por naturaleza la fuente de todos los demás axiomas". (3)

La interpretación anterior no se ha introducido en razón de su importancia inmediata para el presente sistema, sino como ilustración de un hecho significativo en la Filosofía de los poderes intelectuales, a saber, que lo que se ha considerado habitualmente como el axioma fundamental de la Metafísica no es sino la consecuencia de una ley del pensamiento, matemática en la forma. Deseo también conducir la atención a la circunstancia de que la ecuación (1) en que se expresa aquella ley fundamental del pensamiento es una ecuación de segundo grado. (4)

Sin especular en absoluto en este capítulo sobre la cuestión de si tal circunstancia es necesaria por naturaleza podemos aventurarnos a afirmar que si no hubiese existido el procedimiento total del entendimiento habría sido diferente de lo que es. Así., es consecuencia del hecho de que la ecuación fundamental del pensamiento sea de segundo grado el que realicemos la operación del análisis y la clasificación por división en pares de opuestos, o, como se dice técnicamente, *dicotómicamente*. Ahora bien, si la ecuación en cuestión hubiera sido de tercer grado, admitiendo aún interpretación como tal, la división mental debería haber sido de carácter triple y deberíamos haber procedido mediante una especie de *tricotomía*, cuya naturaleza real nos es, con nuestras facultades existentes, imposible concebir adecuadamente pero cuyas leyes podríamos aún investigar en cuanto asunto de especulación intelectual.

16. Nos referiremos ocasionalmente a la ley del pensamiento expresada por la ecuación (1), por razones que han quedado manifiestas en la discusión anterior, llamándola la "ley de la dualidad".

REFERENCIAS

(3) • Τὸ γὰρ αὐτὸ ἅμα ὑπάρχειν τε καὶ μὴ ὑπάρχειν ἀδύνατον τῷ αὐτῷ καὶ κατὰ τὸ αὐτό. . . Αὕτη δὴ πασῶν ἐστὶ βεβαιοτάτη τῶν ἀρχῶν. . . Διὸ πάντες οἱ ἀποδεικνύντες εἰς ταύτην ἀνάγουσιν ἰσχάτην δόξαν· φύσει γὰρ ἀρχὴ καὶ τῶν ἄλλων ἀξιωμάτων αὕτη πάντων.—*Metaphysica*, III. 3.

(4) Si se dijera aquí que la existencia de la ecuación $x^2 = x$ hace necesaria la existencia de la ecuación $x^3 = x$, que es de tercer grado, y se inquiriese a continuación si tal ecuación no sugiere un proceso de tricotomía, la respuesta es que la ecuación $x^3 = x$ no es interpretable en el sistema de la Lógica. Porque escribiéndola en cualquiera de las formas

$$x\,(1 - x)\,(1 + x) = 0, \tag{2}$$
$$x\,(1 - x)\,(-1 - x) = 0, \tag{3}$$

vemos que su interpretación, caso de ser posible, debe incluir la del factor $1 + x$, o la del factor $-1 - x$. El primer caso no es interpretable, pues no podemos concebir la adición de cualquier clase x al universo 1; el segundo no es interpretable por que el símbolo -1 no está sometido a la ley $x(1 - x) = 0$, a la que todos los símbolos de clase se someten. Por tanto la ecuación $x^3 = x$ no admite una interpretación análoga a la de la ecuación $x^2 = x$. Si fuese la primera ecuación, sin embargo, verdadera con independencia de la última, es decir, si fuese aquel acto de la mente que se denota por el símbolo x tal que su segunda repetición reprodujese el resultado de una única operación, mas no su primera o mera repetición, es presumible que podríamos interpretar una de las formas (2), (3), lo cual no puede hacerse bajo las condiciones efectivas del pensamiento. Existen operaciones conocidas por el matemático cuya ley puede expresarse adecuadamente por la ecuación $x^3 = x$. Pero son de una naturaleza enteramente extraña al ámbito del razonamiento general.

Al decir que es concebible que la ley del pensamiento pudiera haber sido diferente de lo que es, quiero tan sólo decir que podemos idear tal hipótesis y estudiar sus consecuencias. La posibilidad de hacer esto no involucra la doctrina de que la ley efectiva de la razón humana sea el producto del azar o de una voluntad arbitraria.

CAPITULO IV

DE LA DIVISION DE LAS PROPOSICIONES EN LAS DOS CLASES DE "PRIMARIAS" Y "SECUNDARIAS"; DE LAS PROPIEDADES CARACTERISTICAS DE AQUELLAS CLASES Y DE LAS LEYES DE LA EXPRESION DE LAS PROPOSICIONES PRIMARIAS

1. Habiendo investigado las leyes de aquellas operaciones mentales que tienen relación con los procesos de la concepción o imaginación, y explicado las leyes correspondientes de los símbolos mediante los que se representan, nos vemos conducidos a considerar la aplicación práctica de los resultados obtenidos: primero, en la expresión de los términos complejos de las proposiciones, segundo, en la expresión de las proposiciones, y, finalmente, en la construcción de un método general de análisis deductivo. En el capítulo presente nos ocuparemos principalmente de la primera de estas cuestiones, siendo necesario introducir para ello la proposición siguiente:

PROPOSICION I

Todas las proposiciones lógicas pueden considerarse como pertenecientes a una u otra de las dos grandes clases a las que pueden darse los nombres respectivos de "primarias" o "proposiciones concretas" y "secundarias" o "proposiciones abstractas".

Toda afirmación hecha por nosotros puede remitirse a uno u otro de los dos tipos siguientes. Ora expresa una relación entre *cosas* o expresa, o es equivalente a la expresión de una relación entre *proposiciones*. Una afirmación concerniente a las propiedades de las cosas, o los fenómenos que manifiestan, o las circunstancias en que se hallan es, hablando con propiedad, la afirmación de una relación entre cosas. Decir que "la nieve es blanca" es equivalente para los fines de la Lógica a decir que "la nieve es una cosa blanca". Una afirmación referente a hechos o acontecimientos, su conexión mutua y su dependencia es, para los mismos fines, equivalente en general a la afirmación de que tales y tales proposiciones concernientes a aquellos acontecimientos tienen una cierta relación entre sí en lo que se refiere a su verdad o falsedad mutuas. Al primer tipo de proposiciones referentes a *cosas* lo llamo "primario"; al segundo, referente a *proposiciones* lo denomino "secundario". La distinción es en la práctica aproximadamente coextensiva, aunque no enteramente, a la distinción lógica usual de las proposiciones en categóricas o hipotéticas.

Las proposiciones, por ejemplo, "El sol brilla", "La tierra es calentada", son primarias; la proposición "Si el sol brilla la tierra es calentada" es secundaria. Decir "El sol brilla" es equivalente a decir "El sol es lo que brilla", y expresa una relación entre dos clases de cosas, a saber, "el sol" y "cosas que brillan". La proposición secundaria, sin embargo, dada más arriba expresa una relación de dependencia entre las dos proposiciones primarias "El sol brilla" y "La tierra es calentada": No afirmo con esto que la relación entre estas proposiciones sea, como la que existe entre los hechos que expresan, una relación de causalidad, sino solamente que la relación entre las proposiciones de tal modo implica y es implicada de tal modo por la relación entre los hechos que puede usarse para los fines de la Lógica como un representante adecuado de tal relación.

2. Si en vez de la proposición "El sol brilla" decimos "Es verdad que el sol brilla" hablamos en ese caso de un modo no directo acerca de cosas sino de una proposición referente a cosas, a saber, acerca de la proposición "El sol brilla". Y por tanto, la proposición en que de ese modo hablamos es secundaria. Toda proposición primaria puede así dar lugar al surgimiento de una proposición secundaria, a saber, a aquella proposición secundaria que afirma su verdad o declara su falsedad.

Ocurrirá usualmente que las partículas *si, o*, indicarán que una proposición es secundaria, mas no involucrarán necesariamente que tal es el caso. La proposición "Los animales son o racionales o irracionales" es primaria. No puede convertirse en "O los animales son racionales o los animales son irracionales" y no expresa por tanto una relación de dependencia entre las dos proposiciones vinculadas entre sí en la última oración disyuntiva. Las partículas *o, o,* no son de hecho criterio para la dilucidación de la naturaleza de las proposiciones, aunque ocurre que se encuentran con más frecuencia en las proposiciones secundarias. Incluso la conjunción *si* puede hallarse en proposiciones primarias. "Los hombres son moderados si son sabios" es un ejemplo de este tipo. No puede convertirse en "Si todos los hombres son sabios, entonces todos los hombres son moderados".

3. Como no es mi propósito discutir los méritos o defectos de la división habitual de las proposiciones, haré simplemente notar en este lugar que el principio sobre el que se funda la clasificación presente es claro y definido en su aplicación, que contiene una distinción real y fundamental de las proposiciones y que es de importancia esencial para el desarrollo de un método general del razonamiento. Tampoco conflictúa en absoluto el hecho de que una proposición primaria pueda ponerse de tal forma que se haga secundaria con las posturas que hemos mantenido en este lugar. Pues en el caso supuesto no se toman en consideración directamente las cosas vinculadas entre sí en la proposición primaria, sino la misma proposición considerada como *verdadera* o *falsa*.

4. En la expresión de tanto las proposiciones primarias como las secundarias se emplearán en esta obra los mismos símbolos sometidos, como se verá, a las mismas leyes. La diferencia entre ambos casos es una diferencia no de forma sino de interpretación. En ambos casos la relación efectiva que es objeto de la proposición a

expresar se denotará por el signo =. En la expresión de proposiciones primarias los miembros así conectados representarán habitualmente "los términos" de una proposición, o, como se los designa más específicamente, su sujeto y predicado.

PROPOSICION II

5. *Para deducir un método general, fundado sobre la enumeración de las variedades posibles, para la expresión de cualquier clase o colección de cosas que pueda constituir un "término" de una proposición primaria.*

PRIMERO: Si la clase o colección de cosas cuya expresión se busca se define sólamente por nombres o cualidades comunes a todos los individuos de que se compone, su expresión constará de un único término en que los símbolos que expresan aquellos nombres o cualidades se combinarán sin que intervenga ningún signo conectivo como en el proceso algebraico de la multiplicación. De este modo, si x representa sustancias opacas, y sustancias brillantes, z piedras, tendremos:

xyz = piedras opacas y brillantes:
xy(1−z) = sustancias opacas y brillantes que no son piedras:
x(1− y)(1−z) = sustancias opacas que no son brillantes y no son piedras;

y de este modo para cualquier otra combinación. Obsérvese que cada una de estas expresiones satisface la misma ley de la dualidad, así como los símbolos individuales que contiene. De este modo se cumple

$$xyz \times xyz = xyz;$$
$$xy\,(1 - z) \times xy\,(1 - z) = xy\,(1 - z);$$

y todos los demás casos. Cualquier término como el susomentado lo designaremos como "término de clase" ya que expresa una clase de cosas mediante las propiedades comunes o nombres de los miembros individuales de dicha clase.

SEGUNDO: Si hablamos de una colección de cosas cuyas diferentes porciones se definen por diferentes propiedades, nombres o atributos, las expresiones de tales porciones diferentes deben formarse separadamente, y conectarse a continuación por el signo +. Mas si la colección de la que deseamos hablar se ha formado excluyendo a partir de una colección más amplia una porción definida de sus miembros, ha de prefijarse el signo − a la expresión simbólica de la porción excluída. En lo referente al uso de estos símbolos pueden añadirse algunas observaciones complementarias.

6. Hablando en general, el símbolo + es el equivalente de las conjunciones "y", "o", y el símbolo −, el equivalente de la preposición "excepto". De las conjunciones "y" y "o", la primera se emplea usualmente cuando la colección que hay que describir forma el sujeto de una proposición, la última cuando forma el predicado. "El sabio *y* el hombre de mundo desean la felicidad" puede tomarse como ilustración de uno de estos casos. "Las cosas que poseen utilidad son *o* productoras de placer *o* preventivas del dolor", puede ejemplificar el otro. Ahora bien, cuando

quiera que una expresión que contenga estas partículas se presenta en una proposición primaria, resulta muy importante saber si los grupos o clases separadas en el pensamiento por ellas se entienden como enteramente distintos entre sí y mutuamente exclusivos o no. ¿Incluye o excluye la expresión "sabios y hombres de mundo" a aquellos que son ambas cosas?. Entiendo que en rigor las conjunciones "y", "o", poseen el poder de separación o exclusión a que nos hemos referido; que la fórmula "todos los x son o y o z" significa, interpretada con rigor "todos los x son o y pero no z, o z pero no y". Mas ha de admitirse a un tiempo que el "jus et norma loquendi" parece más bien favorecer una interpretación opuesta. La expresión "o y o z" se entendería generalmente como inclusora de cosas que son y y z a un tiempo junto con cosas que son una pero no otra. Recordando, sin embargo que el símbolo + posee en efecto el poder de separar de que ya se ha hablado, debemos resolver cualquier expresión disyuntiva que pueda surgirnos en elementos separados realmente en el pensamiento, y conectar a continuación sus expresiones respectivas por el símbolo +.

Y así, en conformidad con el significado implicado, la expresión "Cosas que son o x o y" poseerá dos equivalentes simbólicos diferentes. Si queremos decir "Cosas que son o x, o, si no x, entonces y" la expresión será

$$x(1-y)+y(1-x);$$

representando el símbolo x a los x y el y a los y. Si, sin embargo, queremos decir "Cosas que son o x, o, si no x, entonces y" la expresión será

$$x+y(1-x).$$

Esta expresión supone la admisibilidad de cosas que son tanto x como y a la vez. Podría expresarse más completamente del siguiente modo

$$xy+x(1-y)+y(1-x);$$

pero esta expresión, además de los dos primeros términos, tan sólo reproduce la anterior.

Obsérvese que las expresiones dadas arriba satisfacen la ley fundamental de la dualidad (III.16). Así tenemos:

$$\{x(1-y)+y(1-x)\}^2 = x(1-y)+y(1-x),$$
$$\{x+y(1-x)\}^2 = x+y(1-x).$$

Se verá después que esto no es sino una manifestación particular de una ley general de las expresiones que representan "clases o colecciones de cosas".

7. Los resultados de estas investigaciones pueden incorporarse en la siguiente regla de las expresiones.

REGLA.- *Expresar los nombres simples o las cualidades por los símbolos x, y, z, etc., sus contrarios por $1-x$, $1-y$, $1-z$, etc.; las clases de cosas definidas por*

nombres o cualidades comunes conectando los símbolos correspondientes como en la multiplicación; las colecciones de cosas que consisten en porciones diferentes entre sí, conectando las expresiones de dichas porciones por el signo +. En particular, exprésese la expresión "ó x ó y" por x(1 − y) + y(1 − x) cuando las clases denotadas por x e y sean exclusivas, y por x + y(1 − x) cuando no lo sean. De modo similar, exprésese la expresión "ó x, ó y, ó z" por x(1 − y)(1 − z) + y(1 − x)(1 − z) + z(1 − x)(1 − y) cuando las clases denotadas por x, y, z se entiendan como mutuamente exclusivas, y por x + y(1 − x) + z(1 − x)(1 − y) cuando se entiendan de modo no exclusivo, y así siempre.

8. Sobre esta regla de expresión se funda la regla contraria de interpretación. Ambas se ejemplificarán con quizás suficiente plenitud en los siguientes ejemplos. Omitiendo en aras a la brevedad el sujeto universal "cosas" o "seres" supongamos que

x = duro y = elástico z = metales

y obtendremos los resultados siguientes:

"Metales no–elásticos" se expresará así $z(1 - y)$;

"Sustancias elásticas con metales no–elásticos" se expresará así $y + z(1 - y)$;

"Sustancias metálicas excepto aquellas que no son ni duras ni elásticas", así:
$z - z(1 - x)(1 - y)$, o $z\{1 - (1 - x)(1 - y)\}$, *vide* (6), capítulo II.

En el último ejemplo lo que teníamos realmente que expresar era "metales excepto metales no duros, no elásticos metales". Las conjunciones empleadas entre *adjetivos* son habitualmente superfluas y por tanto no deben expresarse simbólicamente.

De este modo, "Metales duros y elásticos" es equivalente a "Duros elásticos metales", y se expresa mediante xyz.

Tomemos a continuación la expresión "Sustancias duras excepto aquellas que son metálicas y no–elásticas y aquellas que son elásticas y no–metálicas". Aquí la palabra *aquellas* significa sustancias duras, de tal modo que la expresión realmente significa *sustancias duras excepto sustancias duras metálicas no–elásticas, y sustancias duras no–metálicas, elásticas*, extendiéndose la palabra *excepto* a las dos clases que la siguen. La expresión completa es

$$x - \{xz(1 - y) + xy(1 - z)\};$$

o

$$x - xz(1 - y) - xy(1 - z).$$

9. La proposición precedente, con las diversas ilustraciones que de ella se han dado, es un preliminar necesario del capítulo presente.

PROPOSICION III

Para deducir un método general a partir de un examen de sus variedades posibles para la expresión de proposiciones primarias o concretas.

Una proposición primaria, en el sentido más general, está formada por dos términos entre los cuales se afirma que existe una relación. Estos términos no son necesariamente nombres formados por una sóla palabra, sino que pueden representar cualquier conjunto de objetos, del tipo de los que nos hemos ocupado en considerar en las secciones precedentes. La manera de expresar tales términos está, por tanto, comprendida en los preceptos generales dados arriba y sólo nos resta por descubrir cómo han de expresarse las relaciones entre los términos. Esto dependerá evidentemente de la naturaleza de la relación, y más concretamente de si en dicha relación se entiende que los términos son universales o particulares, es decir, de si hablamos del todo de ese conjunto de objetos a que se refiere un término, o de manera imprecisa, del todo o una parte de él, significado usual del prefijo "algunos".

Supóngase que deseamos expresar una relación de identidad entre las dos clases "Estrellas fijas" y "Soles", es decir, expresar que "todas las estrellas fijas son soles", y "todos los soles son estrellas fijas". En este caso, si x representa estrellas fijas e y soles, tendremos

$$x = y$$

para la ecuación buscada.

En la proposición "todas las estrellas fijas son soles" el término "todas las estrellas fijas" se llamaría el *sujeto* y "soles" el *predicado*. Supóngase que extendemos el significado de los términos *sujeto* y *predicado* de la siguiente manera. Significuemos por *sujeto* el primer término de cualquier proposición afirmativa, es decir, el término que precede a la cópula *es* o *son*; y por *predicado* convengamos en significar el segundo término, es decir, aquel que sigue a la cópula, y admitamos que cualquiera de los dos puede ser universal o particular, de tal manera que en un caso o en el otro sea implicada o toda la clase o sólo una parte de la misma. Tendremos entonces la siguiente regla para casos tales como el del último ejemplo:

10. REGLA.- *Cuando tanto el sujeto como el predicado de una proposición son universales, fórmese la expresión separada de cada uno y conéctense mediante el signo* =.

Este caso se presentará habitualmente en la expresión de las definiciones de la ciencia o de temas considerados según el modo de la ciencia pura. La definición que da el Sr. Senior de la riqueza nos ofrece un buen ejemplo de este tipo, a saber:

"La riqueza consiste en cosas transferibles, limitadas en cuanto a la oferta y, o productoras de placer o preventivas del dolor".

Antes de proceder a expresar simbólicamente esta definición debe hacerse notar que la conjunción *y* es supérflua. La riqueza se define realmente por su posesión de tres propiedades o cualidades, no por su composición a partir de tres clases o conjuntos de objetos. Omitiendo, pues, la conjunción *y*, hagamos que

w = riqueza
t = cosas transferibles

s = limitadas en cuanto a la oferta
p = productoras de placer
r = preventivas del dolor

Ahora bien, es patente a partir de la naturaleza del tema que la expresión "o productora de placer o preventivas del dolor" en la anterior definición quiere significar "o productoras de placer o, si no productoras de placer, preventivas del dolor". De este modo la clase de cosas que la expresión susomentada, tomada aisladamente, definiría, constaría de todas las cosas productivas de placer pero preventivas del dolor, junto con todas las cosas no productivas de placer pero preventivas del dolor, y su expresión simbólica sería:

$$p + (1 - p)\, r.$$

Si ahora adjuntamos a esta expresión puesta entre corchetes para denotar que se hace referencia a sus dos términos los símbolos s y t para que limiten su aplicación a cosas "transferibles" y "limitadas en cuanto a la oferta" obtenemos el siguiente equivalente simbólico de la definición original, a saber,

$$w = st\,\{p + r\,(1 - p)\}. \qquad (1)$$

Si la expresión "o productoras de placer o preventivas del dolor" pretendiese apuntar meramente a aquellas cosas que son productoras de placer sin ser preventivas del dolor, p(1 − r), o preventivas del dolor sin ser productoras del placer, r(1−p) (haciendo exclusión de aquellas cosas que son a la vez productoras del placer y preventivas del dolor) la expresión simbólica de la definición sería:

$$w = st\,\{p\,(1 - r) + r\,(1 - p)\}. \qquad (2)$$

Todo esto coincide con lo que se ha establecido arriba de manera más general.

Puede que el lector sienta curiosidad por investigar cuál sería el efecto de traducir literalmente la expresión "cosas productoras de placer o preventivas del dolor" por $p + r$, haciendo que la ecuación simbólica de la definición fuese:

$$w = st\,(p + r). \qquad (3)$$

La respuesta es que esta expresión sería equivalente a (2) con la adicional consecuencia de que las clases de cosas denotadas por *stp* y *str* son completamente distintas, de tal modo que de entre las cosas transferibles y limitadas en cuanto a la oferta no existe ninguna en el universo que sea a la vez productora de placer y preventiva del dolor. Cómo puede determinarse el significado completo de una ecuación se explicará después. Lo que se ha dicho puede mostrar que antes de intentar traducir nuestros datos al lenguaje riguroso de los símbolos es necesario por encima de toda otra cosa descubrir el significado *pretendido* de las palabras que usamos. Mas esta necesidad no puede ser tenida por un mal por aquellos que valoran la corrección del pensamiento y consideran el empleo justo del lenguaje como a un tiempo su instrumento y salvaguardia.

11. Consideremos a continuación el caso en que el predicado de la proposición es particular, como por ejemplo, en "todos los hombres son mortales".

En este caso está claro que nuestro significado es "todos los hombres son algunos seres mortales", y debemos buscar la expresión del predicado "algunos seres mortales". Represéntese pues por v una clase imprecisa en todos los sentidos salvo en éste, a saber, que algunos de sus miembros son seres mortales y hagamos que x represente "seres mortales", en ese caso vx representará "algunos seres mortales". De aquí que, si y representa hombres, la ecuación buscada será:

$$y = vx.$$

A partir de estas consideraciones derivamos la regla siguiente para expresar una proposición universal afirmativa cuyo predicado sea particular:

REGLA.- *Expręsar como antes el sujeto y el predicado, adjuntar al último el símbolo indefinido v e igualar las expresiones.*

Es obvio que v es un símbolo del mismo tipo que x, y, etc. y que se halla sometido a la ley general

$$v^2 = v, \text{ o } v(1 - v) = 0.$$

Así, para expresar la proposición "los planetas son o primarios o secundarios" procederíamos, según la regla, de este modo:

Hagamos que x represente los planetas (el sujeto)
y = cuerpos primarios
z = cuerpos secundarios

en ese caso, asumiendo que la conjunción "o" separa absolutamente la clase de los cuerpos "primarios" de la de los "secundarios" en la medida en que entran en nuestra consideración en la proposición dada, encontramos como ecuación de la proposición:

$$x = v\{y(1 - z) + z(1 - y)\}. \tag{4}$$

Podría merecer la pena reparar en que en este caso la traducción *literal* de las premisas a la forma

$$x = v(y + z) \tag{5}$$

sería exactamente equivalente, siendo v un símbolo de clase indefinida. La forma (4) es, sin embargo, la mejor ya que la expresión

$$y(1 - z) + z(1 - y)$$

consta de términos representantes de clases completamente distintas entre sí, y satisface la ley fundamental de la dualidad.

$$w = v\{x(1 - y)(1 - z) + y(1 - x)(1 - z) + z(1 - x)(1 - y)\}.$$

Si, sin embargo, se significase que los cuerpos celestes eran o soles, o, caso de no ser soles, planetas, o, caso de no ser soles ni planetas, estrellas fijas, significación que no excluye la suposición de que algunos de ellos perteneciesen a la vez a dos o a las tres divisiones de soles, planetas y estrellas fijas, la expresión buscada sería:

$$w = v\,\{x + y\,(1 - x) + z\,(1 - x)\,(1 - y)\}. \qquad (6)$$

Los ejemplos anteriores pertenecen a la clase de las descripciones y no a la de las definiciones. Ciertamente los predicados de las proposiciones son habitualmente particulares. Cuando no es este el caso, o el predicado es un término singular o hacemos uso, en lugar de la cópula "es" o "son", de alguna forma de conexión que indica que ha de tomarse universalmente el predicado.

12. Considérese a continuación el caso de las proposiciones universales negativas; por ejemplo, "ningún hombre es un ser perfecto".

Es patente que en este caso no hablamos de una clase denominada "ningún hombre" y aseveramos de ella que todos sus miembros son "seres perfectos". Mas afirmamos virtualmente de "*todos los hombres*" al efecto de que "*no son seres perfectos*". De este modo el verdadero significado de la proposición es:

"Todos los hombres (sujeto) son (cópula) no perfectos (predicado)"; de donde, si y representa "hombres" y x "seres perfectos" tendremos

$$y = v\,(1 - x),$$

y de modo similar en cualquier otro caso. De este modo tenemos la siguiente Regla:

REGLA.- *Para expresar cualquier proposición de la forma "Ningún x es y" conviértase a la forma "Todo x es no y" y a continuación procédase como en el caso precedente.*

13. Considérese finalmente el caso en que el sujeto de la proposición es particular, por ejemplo "Algunos hombres no son sabios". En este caso, como se ha hecho ver, el negativo *no* puede referirse adecuadamente y ciertamente, al menos para los fines de la Lógica, al predicado *sabio*; pues no queremos decir que no es verdad que "algunos hombres son sabios", sino que pretendemos predicar de "algunos hombres" una carencia de sabiduría. La forma precisa de la proposición dada es, por tanto, "Algunos hombres son no–sabios". Simbolizando, pues, "hombres" mediante y, "sabios" mediante x, es decir "seres sabios" mediante x, e introduciendo v como símbolo de una clase indefinida en todos los sentidos salvo en el de contener algunos individuos de la clase a cuya expresión simbólica va prefijada, tenemos:

$$vy = v\,(1 - x).$$

14. Podemos abarcar todo lo que hemos precisado en la siguiente Regla general:

REGLA GENERAL PARA LA EXPRESION SIMBOLICA DE LAS PROPOSICIONES PRIMARIAS

PRIMERO.- *Si la proposición es afirmativa fórmese la expresión del sujeto y la del predicado. Si alguno fuese particular adjúntesele el símbolo indefinido v e iguálense las expresiones resultantes.*

SEGUNDO.- *Si la proposición es negativa, exprésese primero su verdadero significado adjuntando al predicado la partícula negativa y a continuación procédase como antes.*

Uno o dos ejemplos adicionales pueden ser suficientes a fin de ejemplificar lo dicho.

Ejemplo.- "Ningún hombre de elevada posición se ve libre de miradas envidiosas".

Hagamos que y represente "hombres", x represente "de elevada posición" y z "libre de miradas envidiosas".

Ahora bien, la expresión de la clase descrita como "de elevada posición" y "libre de miradas envidiosas" es xz. Por lo tanto la clase contraria, es decir, aquellos a quienes no se aplica esta descripción se representará por $1 - xz$, y a esta clase se remite a todos los hombres. Por lo tanto tenemos:

$$y = v\,(1 - xz).$$

Si la proposición expresada de este modo se hubiese puesto en la forma equivalente "Los hombres de elevada posición no se ven libres de miradas envidiosas" su expresión habría sido

$$yx = v\,(1 - z).$$

Más adelante se verá que esta expresión es realmente equivalente a la anterior aceptando la hipótesis supuesta, a saber, que v es el símbolo de una clase indefinida.

Ejemplo.- "Ningún hombre es un héroe, salvo aquel que une la abnegación al valor".

Hagamos que x = "hombres", y = "héroes", z = "los que practican la abnegación", w = "los que poseen valor".

La afirmación realmente es la siguiente "los hombres que no poseen valor y practican la abnegación no son héroes".

Tenemos, pues,

$$x\,(1 - zw) = v\,(1 - y)$$

para la ecuación buscada.

15. Al finalizar este capítulo puede que resulte interesante comparar entre sí los principales tipos de proposiciones expresadas simbólicamente. Si convenimos en

representar por X e Y las expresiones simbólicas de los "términos" o cosas relacionadas, aquellos tipos serán:

$$X = v\,Y,$$
$$X = Y,$$
$$vX = v\,Y.$$

En el primero sólo el predicado es particular; en el segundo ambos términos son universales; en el tercero ambos son particulares. Algunas formas de menor importancia se hallan incluidas en esos tipos. Así, si $Y = 0$ la segunda forma sería

$$X = 0;$$

y si $Y = 1$ se convertiría en

$$X = 1;$$

admitiendo ambas formas interpretación. Hay que hacer notar además que las expresiones X e Y, si se fundan en un análisis suficientemente cuidadoso del significado de "los términos" de la proposición, satisfarán la ley fundamental de la dualidad que exige que se cumpla

$$X^2 = X \text{ o } X(1 - X) = 0,$$
$$Y^2 = Y \text{ o } Y(1 - Y) = 0.$$

CAPITULO V

DE LOS PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DEL RAZONAMIENTO SIMBOLICO, Y DE LA EXPANSION O DESARROLLO DE EXPRESIONES QUE CONTIENEN SIMBOLOS LOGICOS.

1. Los capítulos precedentes de esta obra se han dedicado a la investigación de las leyes fundamentales de las operaciones de la mente al razonar, de su desarrollo en las leyes de los símbolos de la Lógica, y de los principios de expresión mediante los cuales aquella especie de proposiciones llamadas primarias puede representarse en el lenguaje de los símbolos. Estas investigaciones han sido preliminares en el sentido más estricto. Constituyen una introducción indispensable a uno de los objetivos principales de este tratado –la construcción de un sistema o método de Lógica sobre la base de un sumario exacto de las leyes fundamentales del pensamiento. Existen ciertas consideraciones tocantes a la naturaleza de este fin y a los medios de su consecución a que estimo necesario en este momento dirigir la atención.

2. Haría ver en primer lugar que la generalidad de un método en Lógica ha de depender en grado sumo de la generalidad de sus procesos y leyes elementales. Hemos investigado, por ejemplo, en las secciones precedentes de esta obra, entre otras cosas las leyes de aquel proceso lógico de *adición* simbolizado por el signo +. Ahora bien, estas leyes se han determinado a partir del estudio de ejemplos en todos los cuales ha sido condición necesaria que las clases o cosas unidas en el pensamiento fuesen mutuamente exclusivas. La expresión $x + y$ parece en verdad imposible de interpretar a no ser que se asuma que las cosas representadas por x y las cosas representadas por y sean enteramente distintas, que no contengan individuos comunes. Y condiciones análogas a esta se contienen en aquellos actos de concepción a partir de los cuales se han descubierto las leyes de las restantes operaciones simbólicas. Surge entonces la cuestión de si es necesario restringir la aplicación de estas leyes y procesos simbólicos por las mismas condiciones de interpretación a partir de las cuales se obtuvo el conocimiento de las mismas. Si tal restricción es necesaria es patente que no es posible algo como un método general en Lógica. Por otra parte, si tal restricción es innecesaria, ¿a qué luz vamos a contemplar procesos que se manifiestan como no susceptibles de interpretación en aquella esfera del pensamiento a que pretenden ayudar?. Estas cuestiones no corresponden sólo a la ciencia de la Lógica. Competen también a toda forma desarrollada del razonamiento humano que se base en el empleo de un lenguaje simbólico.

3. Haría notar en segundo lugar que este fallo aparente en la correspondencia entre procesos e interpretación no se manifiesta en las aplicaciones *ordinarias* de la razón humana. Pues allí no se realizan operaciones cuyo significado y aplicación no se vean; y para la mayor parte de las mentes no basta con que el mero razonamiento formal conecte las premisas con las conclusiones, sino que cada paso del proceso de conexión, todo resultado mediato que se establezca en el curso de la demostración, ha de ser asimismo inteligible. Y sin ninguna duda esta es tanto una condición de hecho como una importante salvaguardia de los razonamientos y los discursos de la vida cotidiana.

Quizás muchos se hallarían dispuestos a extender el mismo principio al uso general del lenguaje simbólico en tanto instrumento del razonamiento. Podría argüirse que, dado que las leyes o axiomas que gobiernan el empleo de los símbolos se establecen a partir de una investigación de sólo aquellos casos en que la interpretación es posible, no tenemos derecho a extender su aplicación a otros casos en que la interpretación es imposible o dudosa, aunque (como debería admitirse) tal aplicación se emplea solamente en los pasos intermedios de la demostración. Si esta objeción fuese conclusiva debería reconocerse que se obtendría un ligero beneficio del uso de un método simbólico en la Lógica. Quizás tal beneficio se limitaría a la ganancia mecánica que se obtendría del empleo del símbolos cortos y convenientes en lugar de otros más engorrosos. Pero la objeción misma es errónea. Cualesquiera que sean nuestras anticipaciones *a priori* es un hecho incuestionable que la validez de una conclusión obtenida mediante cualquier proceso simbólico de razonamiento no depende de nuestra capacidad a la hora de interpretar los resultados formales que se hayan presentado en los diferentes estadios de la investigación. Existen de hecho ciertos principios generales concernientes al uso de los métodos simbólicos que por incumbir al objeto propio de la Lógica expondré en primer lugar, y ofreceré a continuación algunas consideraciones referentes a la naturaleza y a las razones de su pretensión de ser aceptados.

4. Las condiciones de un razonamiento válido mediante símbolos son:

PRIMERO.- Que se otorgue una interpretación fija a los símbolos empleados en la expresión de los datos, y que las leyes de la combinación de esos símbolos se determinen correctamente a partir de aquella interpretación.

SEGUNDO.- Que los procesos formales de solución o demostración se lleven siempre a cabo en obediencia a todas las leyes determinadas según se expuso arriba sin considerar la cuestión de la interpretabilidad de los resultados particulares obtenidos.

TERCERO.- Que el resultado final sea interpretable en cuanto a la forma, y que de hecho se interprete en concordancia con aquel sistema de interpretación que se ha empleado en la expresión de los datos. En lo referente a estos principios se pueden hacer las siguientes observaciones.

5. Sobre la necesidad de una interpretación inmutable de los símbolos ya se ha hecho suficiente hincapié (II.3). La necesidad de que el resultado fijo haya de manifestarse de tal forma que permita que tal interpretación se le aplique se funda sobre el principio obvio de que el empleo de símbolos es un medio para un fin, siendo dicho fin el conocimiento de algún hecho o verdad inteligibles. Y para que este fin pueda lograrse es menester que el resultado final, que expresa la conclusión simbólica, se halle expresado de forma interpretable. En conexión con el segundo de los principios o condiciones generales y susomentados surge sin embargo (V.4) mayor dificultad y se hacen necesaria algunas palabras adicionales.

Haría, pues, notar que el principio en cuestión puede considerarse como fundado en una ley general de la mente cuyo conocimiento no nos es dado *a priori*, es decir, de manera antecedente a la experiencia, sino que se deriva, como el conocimiento de las demás leyes de la mente, a partir de la manifestación clara del principio general en el caso particular. Un sólo ejemplo de razonamiento en que se empleen símbolos que obedezcan leyes fundadas sobre su interpretación, pero sin ninguna referencia sostenida a esa interpretación, y que en la cadena de la demostración nos conduzca a través de pasos intermedios, que no son interpretables, a un resultado final que sí lo sea, parece no sólo establecer la validez de la aplicación particular sino hacernos conocedores de la ley general que en ella se manifiesta. Ninguna acumulación de casos puede añadir propiamente peso a tal evidencia. Puede proporcionarnos concepciones más claras de aquel elemento común de verdad del que depende la aplicación del principio, y preparar de este modo el camino a su recepción. Puede, donde no se haga sentir la fuerza inmedianta de la evidencia, servir de verificación *a posteriori* de la validez práctica del principio en cuestión. Mas esto no afecta a la opinión afirmada, a saber, que el principio general ha de verse en el caso particular – que ha de verse como general en su aplicación así como verdadero en el ejemplo especial. El empleo del signo ininterpretable $\sqrt{-1}$ en los procesos intermedios de la Trigonometría nos suministra una ilustración de lo que se ha dicho. Sospecho que no hay modo alguno de explicar dicha aplicación sin asumir ocultamente el mismo principio en cuestión. Pero aquel principio aunque no garantizado, según yo lo veo, por razonamiento formal basado sobre otras razones, parece merecer un lugar entre aquellas verdades axiomáticas que constituyen, en algún sentido, el fundamento de la posibilidad del conocimiento general y que pueden con justicia considerarse expresiones de las propias leyes y constitución de la mente.

6. El que a continuación exponemos es el modo según el cual el principio arriba establecido se aplicará en el trabajo presente. Se ha visto que cualquier sistema de proposiciones puede expresarse mediante ecuaciones que contengan símbolos x, y, z, que, cuandoquiera que la interpretación sea posible, están sometidos a leyes idénticas en cuanto a la forma a las leyes de un sistema de símbolos cuantitativos susceptibles sólamente de los valores 0 y 1 (II. 15). Mas, dado que los procesos formales de razonamiento dependen sólo de las leyes de los símbolos y no de la natura-

leza de su interpretación, nos es permitido tratar los símbolos susodichos x, y, z, como si fueran símbolos cuantitativos del tipo arriba descrito. *Podemos de hecho arrinconar la interpretación lógica de los símbolos en la ecuación dada: convertirlos en símbolos cuantitativos susceptibles sólamente de los valores 0 y 1; llevar a cabo sobre ellos todos los procesos requeridos de solución; y devolverles finalmente su interpretación lógica.*

Y éste es el modo de proceder que de hecho se adoptará aunque se estimará innecesario explicar nuevamente en cada caso la naturaleza de la transformación empleada. Los procesos a que los símbolos x, y, z, considerados como cuantitativos y del tipo arriba descrito, están sometidos, no están limitados por aquellas condiciones de pensamiento a que estarían si se llevasen a cabo sobre símbolos puramente lógicos, y se nos otorga libertad a la hora de operar sin la cual la búsqueda de un método general en Lógica sería una búsqueda sin esperanza.

Ahora bien, el sistema anterior de procesos no nos llevaría a ningún resultado inteligible a no ser que las ecuaciones finales resultantes de los mismos se presentasen en forma tal que hiciese su interpretación posible una vez restaurada a los símbolos su significación lógica. Existe, sin embargo un método general de reducción de las ecuaciones a una forma tal, y dedicaremos el resto de este capítulo a su consideración. Diré poco en lo concerniente al modo en que el método hace posible la interpretación – reservando esta cuestión para el capítulo siguiente – y me limitaré principalmente al simple proceso empleado que puede caracterizarse como un proceso de "desarrollo". Como introducción a la naturaleza de este proceso puede ser adecuado hacer algunas observaciones.

7. Supóngase que estamos considerando cualquier clase de cosas con referencia a esta cuestión, a saber, la relación en que se hallan sus miembros en lo referente a la posesión o carencia de una cierta propiedad x. Como todo individuo en la clase propuesta o posee o no posee la propiedad en cuestión, podemos dividir la clase en dos partes, formada la primera por aquellos individuos que poseen la propiedad, y la segunda por aquellos que no la poseen. Esta posibilidad de dividir en el pensamiento toda la clase en dos partes constituyentes es anterior a todo conocimiento referente a la constitución de la clase originado en cualquier otra fuente; conocimiento cuyo efecto puede tan sólo ser el informarnos, con mayor o menor precisión, en lo referente a qué otras condiciones se hallan sujetas las partes de la clase que poseen y que no poseen la propiedad dada. Supóngase, pues, que tal conocimiento es al efecto de que los miembros de la clase que poseen la propiedad x poseen también una cierta propiedad u, y que tales condiciones unidas constituyen una definición suficiente de los mismos. Podemos, pues, representar tal parte de la clase original por la expresión ux (II.6). Si, además, se nos informa de que los miembros de la clase original que no poseen la propiedad x se hallan sometidos a una condición v, y así se define, está claro que dichos miembros se hallarán representados por la expresión $v(1 - x)$. De aquí que la clase en su totalidad se represente por

$$ux + v(1 - x);$$

que puede considerarse como una forma general desarrollada para la expresión de cualquier clase de objetos considerados con referencia a la posesión o carencia de una propiedad dada x.

La forma general así establecida sobre bases puramente lógicas puede deducirse también a partir de consideraciones distintas de la ley formal ya considerada, aplicables a los símbolos x, y, z tanto en su aplicación lógica como en su interpretación cuantitativa (V.6).

8. *Definición.*— Cualquier expresión algebraica que contenga un símbolo x se llama función de x y puede representarse de la forma general abreviada $f(x)$. Cualquier expresión que contenta dos símbolos x e y es igualmente llamada función de x e y y puede representarse de la forma general $f(x,y)$, y así para cualquier otro caso.

De este modo la forma $f(x)$ representaría indiferentemente cualquiera de las siguientes funciones, a saber, x, $1-x$, $\frac{1+x}{1-x}$, y $f(x,y)$ representaría igualmente cualquiera de las formas $x+y$, $x-2y$, $\frac{x+y}{x-2y}$, *etc.*

Basándonos en los mismos principios de notación, si en cualquier función $f(x)$ convertimos la x en 1, el resultado se expresará por la forma $f(1)$; si en la misma función convertimos la x en 0 el resultado se expresará por la forma $f(0)$. Así, si $f(x)$ representa la función $\frac{a+x}{a-2x}$, $f(1)$ representará $\frac{a+1}{a-2}$, y $f(0)$ representará $\frac{a}{a}$.

9. *Definición.*— Cualquier función $f(x)$ en que x es un símbolo lógico, o un símbolo cuantitativo susceptible tan sólo de los valores 0 y 1 se dice desarrollada cuando se la reduce a la forma $ax + b(1 - x)$, siendo a y b determinados de tal modo que hagan el resultado equivalente a la función de que se derivó.

Esta definición supone que es posible representar cualquier función $f(x)$ en la forma propuesta. Esta suspensión se justifica en la siguiente proposición

PROPOSICION I

10. *Para Desarrollar cualquier función f(x) en que x es un símbolo lógico.*

Por el principio que se ha sentado en este capítulo, es legítimo tratar a x como un símbolo cuantitativo susceptible tan sólo de los valores 0 y 1.

Asúmase pues que

$$f(x) = ax + b\,(1 - x),$$

y haciendo $x = 1$ obtenemos

$$f(1) = a.$$

Además, haciendo $x = 0$ en la misma ecuación tenemos

$$f(0) = b.$$

De este modo los valores de *a* y *b* están determinados, y sustituyéndolos en la primera ecuación tenemos

$$f(x) = f(1)\, x + f(0)\,(1 - x); \qquad (1)$$

como el desarrollo buscado. (5)

El segundo miembro de la ecuación representa adecuadamente la función *f(x)*, cualquiera que sea la forma de tal función. Pues, considerado x como un símbolo cuantitativo admite sólo los valores 0 y 1, y para cada uno de estos valores el desarrollo

$$f(1)\, x + f(0)\,(1 - x),$$

toma sobre sí el mismo valor que la función f(x).

Como ejemplo, pídasenos desarrollar la función $\frac{1 + x}{1 + 2x}$. En este caso, cuando $x = 1$ tenemos que $f(1) = \frac{2}{3}$, y cuando $x = 0$ tenemos que $f(0) = \frac{1}{1}$, ó 1. De aquí que la expresión que se busca sea

$$\frac{1 + x}{1 + 2x} = \frac{2}{3}\, x + 1 - x;$$

y esta ecuación es satisfecha para cada uno de los valores de que es susceptible el símbolo x.

PROPOSICION II

Para expandir o desarrollar una función que contenga cualquier número de símbolos lógicos.

Empecemos por el caso en que hay dos símbolos, x e y, y representemos la función a desarrollar por *f(x,y)*.

Primeramente considerando a *f(x,y)* como función tan sólo de x y expandiéndola por el teorema general (1) tenemos

$$f(x, y) = f(1, y)\, x + f(0, y)\,(1 - x); \qquad (2)$$

donde f(1,y) representa lo que la función llega a ser cuando en ella escribimos *1* por x, y *f(0,y)*, lo que la función dicha llega a ser cuando en ella escribimos 0 por x.

Ahora bien, tomando el coeficiente f(1,y) y considerándolo como una función de y y expandiéndolo en consecuencia tenemos

$$f(1, y) = f(1, 1)\, y + f(1, 0)\,(1 - y), \qquad (3)$$

donde f(1,1) representa lo que f(1,y) llega a ser cuando se hace a $y = 1$, y f(1,0) lo que f(1,y) cuando se hace a $y = 0$.

De modo parejo, el coeficiente f(0,y) da al expandirse

$$f(0, y) = f(0, 1)\, y + f(0, 0)\,(1 - y). \qquad (4)$$

Sustitúyase en (2) por f(1,y) y f(0,y) sus valores dados en (3) y (4), y tenemos

$$f(x, y) = f(1, 1)\, xy + f(1, 0)\, x\,(1 - y) + f(0, 1)\,(1 - x)\, y + f(0, 0)\,(1 - x)\,(1 - y), \quad (5)$$

para la expansión pedida. Aquí f(1,1) representa lo que f(x,y) llega a ser cuando hacemos x = 1, y = 1; f(1,0) representa lo que f(x,y) cuando hacemos x = 1, y = 0, y así para lo demás.

Así, si f(x,y) representa la función $\frac{1 - x}{1 - y}$, obtenemos

$$f(1, 1) = \frac{0}{0}, \quad f(1, 0) = \frac{0}{1} = 0, \quad f(0, 1) = \frac{1}{0}, \quad f(0, 0) = 1,$$

de donde la expansión de la función dada es

$$\frac{0}{0}\, xy + 0x\,(1 - y) + \frac{1}{0}\,(1 - x)\, y + (1 - x)\,(1 - y).$$

Se verá en el próximo capítulo que las formas $\frac{0}{0}$ y $\frac{1}{0}$, de las que la primera es conocida a los matemáticos como el símbolo de la cantidad indeterminada, admiten, en expresiones tales como las de arriba, una muy importante interpretación lógica.

Supóngase, a continuación que tenemos tres símbolos en la función a expandir, que podemos representar de la forma general siguiente: *f(x,y,z)*. Procediendo como antes obtenemos

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = {} & f(1,1,1)\, xyz + f(1,1,0)\, xy\,(1 - z) + f(1, 0, 1)\, x\,(1 - y)\, z \\ & + f(1, 0, 0)\, x\,(1 - y)\,(1 - z) + f(0, 1, 1)\,(1 - x)\, yz \\ & + f(0, 1, 0)\,(1 - x)\, y\,(1 - z) + f(0, 0, 1)\,(1 - x)\,(1 - y)\, z \\ & + f(0, 0, 0)\,(1 - x)\,(1 - y)\,(1 - z), \end{aligned}$$

en que *f*(1,1,1) representa lo que la función *f(x,y,z)* llega a ser cuando hacemos $x = 1, y = 1, z = 1$, y así para los demás casos.

11. Es ahora fácil ver la ley general que determina la expansión de cualquier función propuesta y reducir el método de realización de la expansión a una regla. Mas, antes de proceder a la exposición de tal regla, será conveniente anteponer las siguientes observaciones:

Toda forma de expansión que hemos obtenido consta de ciertos términos en que entran los símbolos x, y, etc. multiplicados por coeficientes en que aquellos símbolos no entran. Así, la expansión de *f(x)* consta de dos términos, x y $1 - x$, multiplicados por los coeficientes f(1) y f(0) respectivamente. Y la expansión de

f(x,y) consta de los cuatro términos xy, x(1 − y), (1−x)y y (1 − x), (1−y) multiplicados por los coeficientes f(1,1), f(1,0), f(0,1), f(0,0) respectivamente. A los términos x, 1 − x en el primer caso, y a los términos xy, x(1−y), etc. en el último, los llamaremos los constituyentes de la expansión. Es evidente que son independientes en cuanto a la forma de la forma de la función a expandir. Del constituyente xy se llaman *factores* a x y a y.

La regla general de desarrollo constará por tanto, de dos partes, relacionándose la primera con la formación de los *constituyentes* de la expansión, y la segunda con la determinación de sus coeficientes respectivos. Es como sigue.

PRIMERO.- *Para expandir cualquier función de los símbolos x, y, z.* Fórmese una serie de constituyentes de la manera siguiente: que el primer constituyente sea el producto de los símbolos; cámbiese en este producto cualquier símbolo z por 1 − z para el segundo constituyente. Después de estos dos, cámbiese cualquier otro símbolo y por 1−y para los dos constituyentes siguientes. A continuación, en los cuatro constituyentes así obtenidos cámbiese cualquier otro símbolo x por 1 − x para formar cuatro nuevos constituyentes, y así hasta terminar con el número de cambios posibles.

SEGUNDO.- *Para hallar el coeficiente de cualquier constituyente.* Si ese constituyente contiene a x como factor, cambiar en la función original x por 1 pero si contiene a 1 − x como factor cambiar en la función original x por 0. Aplicar la misma regla en referencias a los símbolos y, z, etc. El valor final calculado de la función así transformada será el coeficiente buscado.

La suma de los constituyentes, multiplicado cada uno por su coeficiente respectivo, será la expansión buscada.

12. Merece la pena observar que se puede desarrollar una función con referencia a símbolos que no contiene explícitamente. Así, si procediendo con la regla, buscamos desarrollar la función 1 − x con referencia a los símbolos x e y, tenemos,

Cuando $x = 1$ e $y = 1$ la función dada $= 0$.
$x = 1$,, $y = 0$,, ,, 0.
$x = 0$,, $y = 1$,, ,, 1.
$x = 0$,, $y = 0$,, ,, 1.

De donde el desarrollo es

$$1 - x = 0\ xy + 0\ x(1 - y) + (1 - x)y + (1 - x)\ (1 - y);$$

y este es un verdadero desarrollo. La adición de los términos $(1 - x)y$ y $(1 - x)$ $(1 - y)$ produce la función $1 - x$.

El símbolo 1 así desarrollado de acuerdo con la regla, con respecto al símbolo x, da

$$x + 1 - x.$$

Desarrollado con respecto a x e y da

$$xy + x(1 - y) + (1 - x)y + (1 - x)(1 - y).$$

Desarrollado de forma similar con respecto a cualquier conjunto de símbolos produce una serie que consta de todos los posibles constituyentes de aquellos símbolos.

13. Unas cuantas observaciones adicionales concernientes a la naturaleza de las expansiones generales puede oportunamente añadirse. Tomemos a guisa de ilustración el teorema general (5), que presenta el tipo de desarrollo para funciones de dos símbolos lógicos.

En primer lugar, ese teorema es perfectamente verdadero e inteligible cuando x e y son símbolos cuantitativos de la especie considerada en este capítulo, cualquiera que sea la forma algebraica asignada a la función *f(x,y)*, y puede por tanto emplearse inteligiblemente en cualquier estadio del proceso de análisis intermedio entre el cambio de interpretación de los símbolos desde el lógico al sistema cuantitativo a que se ha hecho arriba referencia, y la restauración final de la interpretación lógica.

En segundo lugar, el teorema es perfectamente verdadero e inteligible cuando x e y son símbolos lógicos, a condición de que la forma de la función *f(x,y)* sea tal que represente una *clase o colección de cosas*, en cuyo caso el segundo miembro es siempre interpretable lógicamente. Por ejemplo, si f(x,y) representa la función $1 - x\ xy$ obtenemos aplicando el teorema

$$\begin{aligned} 1 - x + xy &= xy + 0\ x(1 - y) + (1 - x)y + (1 - x)(1 - y), \\ &= xy + (1 - x)y + (1 - x)(1 - y), \end{aligned}$$

y este resultado es inteligible y verdadero.

De este modo, podemos considerar el teorema como verdadero e inteligible *siempre* para los símbolos cuantitativos de las especies descritas más arriba, para los símbolos lógicos *siempre que sean interpretables*. Cada vez, por lo tanto, que se emplea en esta obra debe entenderse que los símbolos x, y, son cuantitativos y de la especie particular a que nos referimos, si la expansión obtenida no es interpretable.

Pero aunque la expansión no sea siempre interpretable inmediatamente, siempre nos conduce de inmediato a resultados que son interpretables. Así, la expresión $x - y$ da al desarrollar la fórmula

$$x(1 - y) - y(1 - x),$$

que por lo general no es interpretable. No podemos extraer en pensamiento a partir de la clase de cosas que son x y no y, la clase de cosas que son y y no x, porque la última clase no está contenida en la primera. Pero si la forma $x - y$ se presentase como el primer miembro de una ecuación cuyo segundo miembro fuera 0, tendríamos al desarrollarla

$$x(1-y) - y(1-x) = 0.$$

Ahora bien, se mostrará en el siguiente capítulo que la anterior ecuación, considerándose x e y como cuantitativas y de la especia descrita, puede resolverse de inmediato en las dos ecuaciones

$$x(1-y) = 0, \quad y(1-x) = 0,$$

y estas ecuaciones son directamente interpretables en Lógica cuando se asignan interpretaciones lógicas a los símbolos x e y. Y puede señalarse que aunque las funciones no llegan a ser necesariamente interpretables al ser desarrolladas, las *ecuaciones* pueden sin embargo, siempre reducirse mediante este proceso a formas interpretables.

14. La siguiente proposición establece ciertas propiedades fundamentales de los constituyentes. En su enunciación el símbolo t se utiliza para representar indiferentemente cualquier constituyente de una expansión. Así, si la expansión es la de una función de dos símbolos x e y, t representa cualquiera de las cuatro formas xy, x(1 − y), (1 − x)y, y (1 − x)(1 − y). Donde sea necesario representar los constituyentes de una expansión por símbolos simples y distinguirlos, sin embargo, unos de otros, la distinción se señalará por medio de sufijos. De este modo, t_1 podría emplearse para representar xy, t_2 para representar x(1−y), y así sucesivamente.

PROPOSICION III

Todo constituyente individual t de una expansión satisface la ley de la dualidad cuya expresión es

$$t(1-t) = 0.$$

El producto de cualesquiera dos constituyentes distintos de una expasión es igual a 0, y la suma de todos los constituyentes es igual a 1.

PRIMERO.- Consideremos el constituyente particular xy. Tenemos

$$xy \times xy = x^2 y^2.$$

Pero $x^2 = x$, $y^2 = y$, por la ley fundamental de los símbolos de clase; por lo tanto

$$xy \times xy = xy.$$

O representado xy por t,

$$t \times t = t,$$

o

$$t(1-t) = 0.$$

De modo similar el constituyente x(1 − y) satisface la misma ley. Porque tenemos

$$x^2 = x, \quad (1-y)^2 = 1-y,$$
$$\therefore \ \{x(1-y)\}^2 = x(1-y), \ \text{o} \ t(1-t) = 0.$$

Ahora bien, todo factor de cada constituyente es o bien de la forma x o de la forma 1 − x. Por lo tanto el cuadrado de cada factor es igual al mismo factor, y por consiguiente el cuadrado del producto de los factores es decir, del constituyente, es igual al constituyente; por tanto, si t representa cualquier constituyente, tenemos

$$t^2 = t, \ \text{o} \ t(1-t) = 0.$$

SEGUNDO.- El producto de dos constituyentes cualesquiera es *0*. Esto es evidente a partir de la ley general de los símbolos expresada por la ecuación x(1 − x) = 0; pues para cualquier constituyente de la misma expansión que tomemos, habrá al menos un factor x en la una al cual corresponderá un factor 1 − x en la otra.

TERCERO.- La suma de todos los constituyentes de una expansión es la unidad. Esto es evidente a partir de la suma de los dos constituyentes x y 1 − x, o de los cuatro constituyentes xy, x (1 − y), (1 − x)y, (1 − x)(1 − y). Pero se prueba, y de una manera más general, desarrollando *1* en términos de cualquier conjunto de símbolos (V.12). Los constituyentes en este caso se forman como de costumbre, y todos los coeficientes son la unidad.

15. Con la proposición anterior podemos enlazar la siguiente.

PROPOSICION IV

Si V representa la suma de cualquier serie de constituyentes, cuyos coeficientes separados son 1, se satisface la condición

$$V(1-V) = 0.$$

Sean $t_1, t_2 \ldots t_n$ los constituyentes en cuestión, entonces

$$V = t_1 + t_2 \ldots + t_n.$$

Elevando al cuadrado los dos miembros, y observando que $t_1^2 = t_1$, $t_1 t_2 = 0$, etc., tenemos

$$V^2 = t_1 + t_2 \ldots + t_n;$$

de donde

$$V = V^2.$$

Por lo tanto

$$V(1 - V) = 0.$$

REFERENCIAS

(5) Podría ser interesante para algunos observar que el desarrollo de f(x) obtenido en este capítulo ocupa, en el sistema lógico el lugar de la expansión de f(x) en potencias ascendentes de x en el sistema del Algebra ordinaria. Así, puede obtenerse introduciendo en la expresión del famoso teorema de Taylor, a saber,

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\frac{x^2}{1.2} + f'''(0)\frac{x^3}{1.2.3}, \text{ \&c.} \qquad (1)$$

la condición $x(1 - x) = 0$, por lo que hallamos $x^2 = x$, $x^3 = x$, etc., y

$$f(x) = f(0) + \{f'(0) + \frac{f''(0)}{1.2} + \frac{f'''(0)}{1.2.3} + \text{\&c.}\}\,x. \qquad (2)$$

Mas haciendo en (1) $x = 1$, obtenemos

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{1.2} + \frac{f'''(0)}{1.2.3} + \text{\&c.};$$

de donde

$$f'(0) + \frac{f''(0)}{1.2} + \text{\&c.} = f(1) - f(0),$$

y (2) se convierte, al sustituir, en

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \{f(1) - f(0)\}\,x, \\ &= f(1)x + f(0)\,(1 - x), \end{aligned}$$

la forma en cuestión. Esta demostración al aceptar que f(x) sea desarrollable en una serie de potencias ascendentes de x es menos general que la que aparece en el texto.

CAPITULO VI

DE LA INTERPRETACION GENERAL DE LAS ECUACIONES LOGICAS, Y EL ANALISIS DE LAS PROPOSICIONES RESULTANTE. TAMBIEN DE LA CONDICION DE INTERPRETABILIDAD DE LAS FUNCIONES LOGICAS

1. Se ha observado que la expansión completa de cualquier función por la regla general demostrada en el capítulo anterior comprende dos clases distintas de elementos, a saber, los constituyentes de la expansión, y sus coeficientes. Me propongo en el presente capítulo investigar en primer lugar, la interpretación de los constituyentes, y después el modo en el cual esta interpretación se modifica por los coeficientes con los cuales se conectan.

Los términos "ecuación lógica", "función lógica" etc., se emplearán generalmente para denotar cualquier ecuación o función que comprenda los símbolos x, y, etc., que pueden presentarse bien en la expresión de un sistema de premisas, o bien la serie de resultados simbólicos que surge entre las premisas y la conclusión. Si esta función o ecuación está en una forma no interpretable inmediatamente en lógica, los símbolos x, y, etc., deben considerarse como símbolos cuantitativos de la especie descrita en los capítulos anteriores (II. 15), (V. 6), que satisfacen la ley.

$$x\,(1 - x) = 0.$$

Por el problema, por tanto, de la interpretación de tales funciones o ecuaciones lógicas se entiende la reducción de ellas a una forma en la cual, al asignar valores lógicos a los símbolos x, y, etc., se hace interpretable, junto con la interpretación resultante. Estas definiciones convencionales concuerdan con los principios generales en lo referente al modo de llevar a cabo el método de este tratado, establecidos en el capítulo precedente.

PROPOSICION I

2. *Los constituyentes de la expansión de cualquier función de símbolos lógicos x, y, etc., son interpretables, y representan las diversas divisiones exclusivas del universo del discurso, formado por la predicación y negación en todas las formas posibles de las cualidades denotadas por los símbolos x, y, etc.*

Para una mayor claridad de concepción, supongamos que la función desarrollada contenga dos símbolos x e y, con referencia a los cuales se ha efectuado la expansión. Tenemos así los siguientes constituyentes, a saber

$$xy, \quad x\,(1 - y), \quad (1 - x)\,y, \quad (1 - x)\,(1 - y).$$

De estos es evidente que el primer xy representa aquella clase de objetos que posee a la vez las dos cualidades elementales expresadas por x e y, y que el segundo $x(1 - y)$ representa la clase que posee la propiedad x, pero no la propiedad y. De modo parejo, el tercer constituyente representa la clase de objetos que posee la propiedad representada por y, pero no la representada por x; y el cuarto constituyente $(1 - x)\ (1 - y)$, representa aquella clase de objetos cuyos miembros no poseen ninguna de las cualidades en cuestión.

Así, los constituyentes del caso que acabamos de considerar representan las cuatro clases de objetos que pueden describirse por la afirmación y la negación de las propiedades expresadas por x, e y. Cada clase es distinta de las demás. Ningún miembro de una es miembro de otra, porque cada clase posee alguna propiedad o cualidad contraria a una propiedad o cualidad poseida por cualquier otra clase. Además, estas clases todas juntas componen el universo, porque no existe ningún objeto que no pueda ser descrito por la presencia o la ausencia de una cualidad propuesta, y así cada cosa individual en el universo puede referirse a una u otra de las cuatro clases formadas por la combinación posible de dos clases dadas x e y, y sus contrarias.

Las observaciones hechas con referencia a los constituyentes de $f(x, y)$ son de carácter perfectamente general. Los constituyentes de cualquier expansión representan clases, aquellas clases son mutuamente distintas, por la posesión de cualidades contrarias, y todas ellas juntas componen la totalidad del universo del discurso.

3. Estas propiedades de los constituyentes tienen su expresión en los teoremas demostrados en la conclusión del último capítulo, y pueden deducirse a partir de allí. Del hecho de que cada constituyente satisface la ley fundamental de los símbolos individuales, podría haberse conjeturado que cada constituyente representaría una clase. Del hecho de que el producto de cualquiera de los dos constituyentes de una expansión se hace 0 se podría haber concluido que las clases que representan son mutuamente exclusivas. Por último, del hecho de que la suma de los constituyentes de una expansión sea la unidad, podría haberse inferido que las clases que representan, componen juntas el universo.

4. Sobre las leyes de los constituyentes y el modo de su interpretación determinado más arriba, se fundan el análisis y la interpretación de las ecuaciones lógicas. Que todas estas ecuaciones admiten interpretación por el teorema del desarrollo ya ha sido establecido. Propongo aquí investigar las formas de posible solución que se presentan así en la conclusión de una cadena de razonamiento, y mostrar cómo surgen esas formas. Aunque, hablando propiamente, no son sino manifestaciones de un único y fundamental tipo o principio de expresión, el que se presenten separadamente a la mente las menores variedades que exhiben llevará a una mayor claridad de aprehensión.

Las formas, que son tres en número, son las siguientes:

FORMA I

5. La forma que consideraremos en primer lugar surge cuando cualquier ecuación lógica $V = 0$ se desarrolla, y el resultado, tras su resolución en sus ecuaciones componenetes, ha de interpretarse. Se supone que la función incluye los símbolos lógicos x, y, etc., en combinaciones que no son fraccionarias. Las combinaciones fraccionarias surgen solamente, en efecto, en la clase de problemas que consideraremos cuando hablemos de la tercera de las formas de solución a las que nos hemos referido más arriba.

PROPOSICION II

Para interpretar la ecuación lógica $V = 0$.

Para una mayor simplicidad supongamos que V contiene sólo dos símbolos x e y, y representemos el desarrollo de la ecuación dada por

$$axy + bx(1 - y) + c(1 - x)\,y + d(1 - x)(1 - y) = 0; \quad (1)$$

siendo a, b, c y d constantes numéricas definidas.

Ahora bien, supongamos que cualquier coeficiente, como a, no se hace igual a cero. Multipliquemos entonces cada lado de la ecuación por el constituyente xy, al cual está unido ese coeficiente, tenemos

$$axy = 0,$$

de donde, como a no se hace 0;

$$xy = 0,$$

y este resultado es completamente independiente de la naturaleza de los demás coeficientes de la expansión. Su interpretación, asignando a x e y su significado lógico, es "no existen individuos que pertenezcan a la vez a la clase representada por x y a la clase representada por y".

Pero si *se hace 0* el coeficiente a, el término axy no aparece en el desarrollo (I), y por tanto la ecuación $xy = 0$ no se puede deducir a partir de allí.

De modo parejo, si el coeficiente b no se hace 0, tenemos

$$x(1 - y) = 0,$$

que admite la interpretación "No hay individuos que a la vez pertenezcan a clase x, y no pertenezcan a la clase y".

Cualquiera de las interpretaciones anteriores puede, sin embargo, como mostraremos a continuación, exhibirse en una forma diferente.

La suma de las distintas interpretaciones así obtenidas a partir de varios términos de la expansión cuyos coeficientes no se hacen 0, constituirá la interpretación completa de la ecuación $V = 0$. El análisis es esencialmente independiente del número de símbolos lógicos contenidos en la función V, y el objeto de la proposición se alcanzará por lo tanto, en todos los casos, mediante la siguiente regla:

REGLA.– *Desarrollar la función V, e igualar a 0 todo constituyente cuyo coeficiente no se haga 0. La interpretación de estos resultados colectivamente constituirá la interpretación de la ecuación dada.*

6. Tomemos como ejemplo la definición de "animales comestibles" establecida en la ley judía, a saber "Los animales comestibles son aquellos que a la vez son bisulcos y rumian",y supongamos

x = animales comestibles

y = animales bisulcos

z = animales que rumian

Entonces la proposición dada se representará por la ecuación

$$x = yz,$$

que reduciremos a la forma

$$x - yz = 0,$$

y buscamos la forma de interpretación a la cual conduce el presente método. Desarrollando completamente el primer miembro, tenemos

$$\begin{gathered} 0\, xyz + xy\,(1-z) + x\,(1-y)\,z + x\,(1-y)\,(1-z) \\ -(1-x)yz + 0(1-x)y(1-z) + 0(1-x)(1-y)z + 0(1-x)(1-y)(1-z). \end{gathered}$$

Por lo tanto, los términos cuyos coeficientes no se hacen 0 dan

$$xy(1-z) = 0, \quad xz(1-y) = 0, \quad x(1-y)(1-z) = 0, \quad (1-x)\,yz = 0.$$

Estas ecuaciones expresan una negación de la existencia de ciertas clases de objetos, a saber:

PRIMERO.– De animales comestibles, y bisulcos, pero no rumiantes.

SEGUNDO.– De animales comestibles, y rumiantes, pero no bisulcos.

TERCERO.– De animales bisulcos y rumiantes, pero no comestibles.

CUARTO.– De animales bisulcos, rumiantes y no comestibles.

Ahora bien, todas estas varias negaciones están realmente incluidas en la proposición original. Y a la inversa, si esas negaciones se dan por sentadas la proposición original se seguirá como una consecuencia necesaria. Son de hecho, los elementos separados de esta proposición. Cada proposición primaria puede así descomponerse en una serie de negaciones de la existencia de ciertas clases de cosas definidas, y, desde este sistema de negaciones puede reconstruirse. Podríamos preguntarnos aquí, ¿cómo es posible hacer una proposición afirmativa a partir de una serie de negaciones y denegaciones? ¿De qué fuente se deriva el elemento positivo? Contesto que la mente asume la existencia de un universo no *a priori*

como un hecho independiente de la experiencia, sino *a posteriori* como deducción de la experiencia, o *hipotéticamente* como fundamento de la posibilidad del razonamiento asertivo. Así de la proposición "No hay hombres no falibles", que es una negación o denegación de la existencia de "hombres infalibles" se puede inferir bien hipotéticamente, "Todos los hombres (si existen hombres) son falibles", o bien absolutamente (habiéndonos asegurado la experiencia de la existencia de la raza) "Todos los hombres son falibles".

La forma en la que se exhiben las conclusiones por el método de esta Proposición puede llamarse la forma de "Denegación Simple o conjunta".

FORMA II

7. Igual que la forma previa se derivó del desarrollo e interpretación de una ecuación cuyo segundo miembro es 0, la forma presente, que es suplementaria de aquella, se derivará del desarrollo e interpretación de una ecuación cuyo segundo miembro es 1. Es fácilmente sugerible por el análisis de la proposición previa.

Así, en el último ejemplo discutido dedujimos a partir de la ecuación

$$x - yz = 0$$

la denegación conjunta de la existencia de las clases representadas por los constituyentes

$$xy(1-z), \quad xz(1-y), \quad x(1-y)(1-z), \quad (1-x)yz,$$

cuyos coeficientes no eran igual a 0. Se sigue de aquí que los constituyentes restantes representan clases que constituyen el universo. De aquí tendremos

$$xyz + (1-x)y(1-z) + (1-x)(1-y)z + (1-x)(1-y)(1-z) = 1.$$

Esto es equivalente a la afirmación de que todas las cosas existentes pertenecen a una u otra de las siguientes clases, a saber:

PRIMERO.— Animales comestibles que a la vez son bisulcos y rumian.

SEGUNDO.— Animales no comestibles que son bisulcos, pero no rumian.

TERCERO.— Animales comestibles que rumian, pero no son bisulcos.

CUARTO.— Cosas que no son ni animales comestibles, ni rumiantes, ni bisulcos.

Esta forma de conclusión puede ser llamada la forma de "Afirmación Simple o Disyuntiva"; simple cuando solamente un constituyente aparece en la ecuación final; disyuntiva cuando, como más arriba, hay más de un constituyente.

Cualquier ecuación $V = 0$ donde V satisfaga la ley de la dualidad, puede hacerse susceptible de esta forma de interpretación reduciéndola a la forma $1 - V = 1$, y desarrollando el primer miembro. El caso, sin embargo, se halla incluido realmente en la siguiente forma general. Las dos formas previas son de escasa importancia comparadas con la siguiente.

FORMA III

8. En los dos casos precedentes las funciones a desarrollar se igualaban a 0 y 1 respectivamente. En el caso presente supondré la correspondiente función igualada a cualquier símbolo lógico w. Hemos de intentar interpretar la ecuación $V = w$, siendo V una función de los símbolos lógicos x, y, z, etc. En primer lugar, sin embargo, estimo necesario mostrar cómo surge la ecuación $V = w$, o, como usualmente se presentará, $w = V$.

Resumamos la definición de "animales comestibles" empleada en los ejemplos previos, a saber "animales comestibles son aquellos que a la vez son bisulcos y rumian" y supongamos que se nos pide terminar la relación en que se hallan "animales que rumian" "animales comestibles" y "animales bisulcos". La ecuación que expresa la proposición dada es

$$x = yz,$$

y nuestro objeto estará cumplido si podemos determinar z como una función interpretable de x e y.

Ahora bien, tratando x, y, z como símbolos de cantidad sujetos a una ley particular, podemos deducir de la ecuación anterior al solucionar

$$z = \frac{x}{y}.$$

Pero esta ecuación no está de momento en una forma interpretable. Si la podemos reducir a una forma tal nos dará la relación pedida.

Desarrollando el segundo miembro de la ecuación anterior tenemos

$$z = xy + \frac{1}{0}\, x\,(1 - y) + 0\,(1 - x)\,y + \frac{0}{0}(1 - x)\,(1 - y),$$

y se mostrará después (Prop. 3) que admite la siguiente interpretación:

"Los animales que rumian constan de todos los animales comestibles (que también son bisulcos), junto con un resto indefinido (algunos, ninguno o todos) de animales no comestibles que no son bisulcos.

9. Ahora bien, el anterior es un ejemplo particular de un problema de la máxima generalidad en Lógica, y que puede exponerse de este modo: "Dada cualquier ecuación lógica que conecte los símbolos x, y, z, w, se pide una expresión interpretable para la relación de la clase representada por w con las clases representadas por los otros símbolos x, y, z, *etc.*".

La solución de este problema consiste en todos los casos en determinar a partir de la ecuación *dada* la expresión del anterior símbolo w en términos de los otros símbolos, y hacer esta expresión interpretable mediante desarrollo. Ahora bien, la ecuación dada es siempre de primer grado con respecto a cada uno de los símbolos

contenidos. La expresión pedida para w puede, por lo tanto, siempre hallarse. De hecho, si desarrollamos la ecuación dada, cualquiera que sea su forma, respecto de w, obtenemos una ecuación de la forma

$$Ew + E'(1 - w) = 0, \qquad (1)$$

Siendo E y E' funciones de los símbolos restantes. De lo anterior tenemos

$$E' = (E' - E)\, w.$$

Por tanto

$$w = \frac{E'}{E' - E} \qquad (2)$$

y desarrollando el segundo miembro por la regla del desarrollo sólo restará interpretar el resultado en lógica por la siguiente proposición.

Si la fracción $\frac{E'}{E' - E}$ tiene factores comunes en su numerador y denominador, no podemos suprimirlos, a menos que sean constantes numéricas. Pues los símbolos x, y, etc., considerados como cuantitativos, pueden admitir valores tales como 0 y 1 como para causar que los factores comunes se hagan igual a 0, en cuyo caso la ley algebraica de la reducción falla. Este es el caso contemplado en nuestras observaciones sobre el fallo del axioma algebraico de la división (II. 14). *Expresar* la solución en la forma (2), y sin intentar llevar a cabo reducciones no autorizadas, interpretar el resultado mediante el teorema del desarrollo, es un rumbo estrictamente de acuerdo con los principios generales de este tratado.

Si se pide la relación de la clase expresada por 1 − w con las otras clases, x, y, *etc.*, deducimos a partir de (1), de un modo similar a lo anterior

$$1 - w = \frac{E}{E - E'},$$

para cuya interpretación también es aplicable el método de la siguiente proposición:

PROPOSICION III

10. *Determinar la interpretación de cualquier ecuación lógica de la forma* $w = V$ *en que* w *es un símbolo de clase, y* V *una función de otros símbolos de clase muy indelimitados en su forma.*

Expandamos enteramente el segundo miembro de la ecuación anterior. Cada coeficiente del resultado pertenecerá a una de las cuatro clases que, con sus respectivas interpretaciones, procedemos a discutir.

PRIMERO.– Sea 1 el coeficiente. Como este es el símbolo del universo, y dado que el producto de cualesquiera dos símbolos de clase representan aquellos individuos que se hallan en ambas clases, cualquier constituyente que tenga la unidad por

coeficiente debe interpretarse sin limitación, es decir, está implicada la totalidad de la clase a la que representa.

SEGUNDO.– Sea 0 el coeficiente. Como en Lógica, al igual que en Aritmética, este es el símbolo de la nada, no se debe tomar ninguna parte de la clase representada por el constituyente al cual está prefijado.

TERCERO.– Sea el coeficiente de la forma $\frac{0}{0}$. Ahora bien, como en Aritmética, el símbolo $\frac{0}{0}$ representa un *número indefinido*, excepto cuando de otra manera está determinado por alguna circunstancia especial, la analogía sugeriría que en el sistema de esta obra el mismo símbolo representase una *clase indefinida*. Que éste es su verdadero significado lo aclarará el siguiente ejemplo:

Tomemos la proposición "no existen hombres no mortales", representemos esta proposición mediante símbolos, y busquemos, de acuerdo con las leyes a las cuales aquellos símbolos han mostrado su sometimiento, una definición inversa a "seres mortales" en términos de "hombres".

Ahora bien, si representamos "hombres" por y y "seres mortales" por x, la proposición "No existen hombres que sean no mortales" será expresada por la ecuación

$$y(1 - x) = 0,$$

a partir de la cual vamos a buscar el valor de x. Ahora bien, la ecuación anterior da

$$y - yx = 0, \text{ o } yx = y.$$

Si fuera ésta una ecuación algebraica ordinaria, dividiríamos a continuación los dos miembros de ella por y. Pero se observó en el Cap. II que la operación de la división no puede *ejecutarse* con los símbolos con los que tratamos ahora. Nuestra posibilidad, entonces, es *expresar* la operación y desarrollar el resultado por el método del capítulo precedente. Tendremos, pues, en primer lugar,

$$x = \frac{y}{y},$$

y desarrollando el segundo miembro según las reglas

$$x = y + \frac{0}{0}(1 - y).$$

Esto implica que mortales (x) consta de todos los hombres (y) junto con un resto de seres tal que no son hombres $(1 - y)$, como se indicará mediante el coeficiente $\frac{0}{0}$. Ahora bien, investiguemos qué resto de "no hombres" está implícito en la premisa. Podría ocurrir que el resto incluyese todos los seres que no son hombres, o podría incluir sólo algunos de ellos, y no otros, o podría no incluir ninguno, y cualquiera de estas asunciones estaría en perfecto acuerdo con nuestra premisa. En

otras palabras, si estos seres que no son hombres son *todos*, o *alguno*, o *ninguno* de ellos *mortales*, la verdad de la premisa que virtualmente afirma que todos los hombres son mortales quedará igualmente inafectada, y por consiguiente la expresión $\frac{0}{0}$ aquí indica que deben tomarse *todos*, *alguno* o *ninguno* de la clase a cuya expresión está unida.

Aunque la determinación anterior del significado del símbolo $\frac{0}{0}$ se funda sólo sobre el examen de un caso particular, el principio contenido en la demostración es general, y no existen circunstancias bajo las cuales el símbolo pueda presentarse a las que un modo similar de análisis sea inaplicable. Podemos llamar con propiedad a $\frac{0}{0}$ un *símbolo de clase indefinida*, y podemos, si la ocasión lo requiriese, reemplazarlo por un símbolo simple v, sujeto a la ley fundamental $v(1 - v) = 0$.

CUARTO.- Puede suceder que el coeficiente de un constituyente en una expansión no pertenezca a ninguno de los casos previos. Para averiguar su verdadera interpretación cuando esto suceda, será necesario postular el siguiente teorema:

11. TEOREMA.– *Si una función V, que se propone representar cualquier clase o conjunto de objetos w, se desarrolla, y si el coeficiente numérico a de cualquiera constituyente en este desarrollo no satisface la ley*

$$a(1 - a) = 0,$$

entonces el constituyente en cuestión debe igualarse a 0.

Para probar el teorema en general, representemos la expansión dada bajo la forma

$$w = a_1 t_1 + a_2 t_2 + a_3 t_3 + \&c., \qquad (1)$$

en la cual $t_1, t_2, t_3,$ etc. representan los constituyentes, y $a_1, a_2, a_3,$ etc. los coeficientes, supongamos también que a_1 y a_2 no satisfacen la ley

$$a_1(1 - a_1) = 0, \quad a_2(1 - a_2) = 0;$$

Pero que los demás coeficientes cumplen la ley en cuestión, de este modo tenemos

$$a_3^2 = a_3, \&c.$$

Ahora bien, multipliquemos cada lado de la ecuación (1) por sí mismo. El resultado será

$$w = a_1^2 t_1 + a_2^2 t_2 + \&c. \qquad (2)$$

Esto es evidente dado el hecho de que debe representar el desarrollo de la ecuación

$$w = V^2,$$

pero puede también probarse elevando al cuadrado (1), y observando que tenemos

$$t_1^2 = t_1, \quad t_2^2 = t_2, \quad t_1 t_2 = 0, \&c.$$

por las propiedades de los constituyentes. Ahora bien, sustrayendo (2) de (1), tenemos

$$(a_1 - a_1^2)\,t_1 + (a_2 - a_2^2)\,t_2 = 0.$$

o

$$a_1(1 - a_1)\,t_1 + a_2(1 - a_2)\,t_2 = 0.$$

Multipliquemos la última ecuación por t_1; entonces, puesto que $t_1 t_2 = 0$, tenemos

$$a_1(1 - a_1)\,t_1 = 0, \text{ de donde } t_1 = 0.$$

De modo parejo, multiplicando la misma ecuación por t_2 tenemos

$$a_2(1 - a_2)\,t_2 = 0, \text{ de donde } t_2 = 0.$$

Así pues, puede demostrarse de manera general que cualquier constituyente cuyo coeficiente no esté sujeto a la misma ley fundamental a que lo están los símbolos puede igualarse por separado a 0. La forma usual en la que tales coeficientes se presentan es $\frac{1}{0}$. Este es el símbolo algebraico del infinito. Ahora bien, cuanto más se aproxima cualquier número al infinito (permítase tal expresión), más se aparta de la condición de satisfacer la ley fundamental a la que nos referíamos más arriba.

El símbolo $\frac{0}{0}$, cuya interpretación se ha discutido previamente, no incumple necesariamente la ley que consideramos aquí, puesto que admite indiferentemente los valores numéricos de 0 y 1. Sin embargo, su interpretación de hecho como un símbolo de clase indefinida no puede, pienso, ser deducida a partir de sus propiedades aritméticas, excepto bajo el fundamento de la analogía, sino que debe establecerse experimentalmente.

12. Podemos recopilar los resultados a los que hemos llegado en el siguiente resumen:

PRIMERO.– El símbolo 1, como coeficiente de un término en un desarrollo, indica que debe tomarse la totalidad de la clase a la que este constituyente represente.

SEGUNDO.– El coeficiente 0 indica que no debe tomarse ningún miembro de la clase.

TERCERO.– El símbolo $\frac{0}{0}$ indica que debe tomarse una porción perfectamente *indefinida* de la clase, es decir *algún*, ninguno *o todos* sus miembros.

CUARTO.– Cualquier otro símbolo como coeficiente indica que el constituyente al que está prefijado debe igualarse a 0.

Se sigue de aquí que si la solución de un problema, obtenida por desarrollo, es de la forma

$$w = A + 0B + \frac{0}{0}\,C + \frac{1}{0}\,D,$$

esta solución puede resolverse en las dos ecuaciones siguientes, a saber

$$w = A + vC, \tag{3}$$

$$D = 0, \tag{4}$$

siendo v un símbolo de clase indefinida, la interpretación de (3) muestra qué elementos entran, o pueden entrar en la composición w, la clase de cosas cuya definición se pide y la interpretación de (4) muestra qué relaciones existen entre los elementos del problema original, con independencia perfecta de w.

Tales son los cánones de interpretación. Podría añadirse que son universales en su aplicación, y que su uso está siempre exento de excepción o fallo.

13. *Corolario*.— Si V es una función lógica interpretable independientemente satisfará la ley simbólica $V(1 - V) = 0$.

Por una función lógica interpretable independientemente entiendo aquélla que es interpretable, sin presuponer ninguna relación entre las cosas representadas por los símbolos que contiene. Así $x(1 - y)$ es interpretable independientemente, pero $x - y$ no lo es. La última función presupone, como una condición de su interpretación, que la clase representada por y esté contenida enteramente en la clase representada por x; la función anterior no implica tal requisito.

Ahora bien, si V es interpretable independientemente, y si w representa el conjunto de individuos que contiene, la ecuación $w = V$ se mantendrá verdadera, sin acarrear como consecuencia la conversión en cero de ninguno de los constituyentes en el desarrollo de V; puesto que tal conversión en cero de los constituyentes implicaría relaciones entre las clases de cosas indicadas por los símbolos en V. De aquí que el desarrollo de V será de la forma

$$a_1 t_1 + a_2 t_2 + \&c.$$

satisfaciendo todos los coeficientes a_1, a_2, etc. la condición

$$a_1(1 - a_1) = 0, \quad a_2(1 - a_2) = 0, \&c.$$

De aquí que por el razonamiento de la Prop. 4, Cap. V, la función V estará sujeta a la ley

$$V(1 - V) = 0.$$

Este resultado, aunque evidente *a priori* por el hecho de que V se supone representa una clase o conjunto de cosas, se muestra así como consecuencia también de las propiedades de los constituyentes de los que se compone. La condición $V(1 - V) = 0$ puede llamarse "la condición de interpretabilidad de las funciones lógicas".

14. La forma general de las soluciones o conclusiones lógicas desarrollada en la última proposición, puede designarse como una "relación entre términos". Utilizo, como anteriormente la palabra "términos" para designar las partes de una proposición, sea simple o compleja, que están conectadas por la cópula "es" o "son". A las

clases de cosas representadas por símbolos individuales se les puede llamar elementos de la proposición.

15. Ejemplo 1.– Retomando la definición de "animales comestibles" (VI. 6) se pide una descripción de "animales no comestibles".

Aquí, como anteriormente, representando por x "animales comestibles", por y "animales bisulcos", por z "animales que rumian", tenemos

$$x = yz\,; \tag{5}$$

de donde

$$1 - x = 1 - yz\,;$$

y desarrollando el segundo miembro,

$$1 - x = y(1 - z) + z(1 - y) + (1 - y)(1 - z)\,;$$

que es interpretable según la siguiente proposición: *animales no comestibles son todos aquellos que son bisulcos y no rumian, todos aquellos que rumian y no son bisulcos y todos aquellos que ni son bisulcos ni rumian.*

Ejemplo 2.– Dada la misma definición, se pide una descripción de los animales no bisulcos.

A partir de la ecuación $x = yz$ tenemos

$$y = \frac{x}{z}\,;$$

de donde

$$1 - y = \frac{z - x}{z}\,;$$

y desarrollando el segundo miembro

$$1 - y = 0\ xz + \frac{-1}{0}\,x(1 - z) + (1 - x)z + \frac{0}{0}\,(1 - x)(1 - z).$$

Aquí, de acuerdo con la Regla, el término cuyo coeficiente es $-\frac{1}{0}$, debe ser igualado a 0 por separado, de donde tenemos

$$1 - y = (1 - x)\,z + v\,(1 - x)\,(1 - z),$$
$$x\,(1 - z) = 0\,;$$

En donde la primera ecuación da al interpretarla, la Proposición: *los animales no bisulcos son todos los animales no comestibles que rumian, y un resto indefinido (alguno, ninguno o todos) de animales no comestibles que rumian.*

La segunda ecuación da la Proposición: *No hay animales comestibles que no rumien.* Esta es una de las relaciones independientes a que nos referimos más arriba.

Buscamos la relación directa entre "Animales no bisulcos" y "Animales comestibles y que rumian". Sucede, sin embargo, que independientemente de cualquier relación entre los animales no bisulcos, existe, en virtud de la premisa, una relación separada entre animales comestibles y animales que rumian. Esta relación es dada también necesariamente por el proceso.

Ejemplo 3.– Tomemos la siguiente definición, a saber:

"Seres responsables son todos los seres racionales que o bien son libres para actuar, o bien han sacrificado voluntariamente su libertad", y apliquémosle el análisis precedente.

Represente x seres responsables

Represente y seres racionales

Represente z aquellos que son libres para actuar

Represente w aquellos que han sacrificado voluntariamente su libertad de acción.

En la expresión de esta definición asumiré que las dos alternativas que presenta, a saber: "Seres racionales libres para actuar", y "Seres racionales cuya libertad de acción ha sido sacrificada voluntariamente" son mutuamente excluyentes, de tal modo que ningún individuo pertenece a la vez a las dos divisiones. Esto nos permitirá interpretar literalmente la proposición en el lenguaje de los símbolos, de la manera siguiente:

$$x = yz + yw. \tag{6}$$

Determinemos en primer lugar desde ahora la relación entre "Seres racionales" y seres "responsables", seres libres para actuar y seres que han abjurado voluntariamente de su libertad de acción. Quizás este propósito se exponga mejor si decimos que deseamos expresar la relación entre los elementos de la premisa en forma tal que nos sea posible determinar hasta qué punto puede inferirse la racionalidad a partir de la responsabilidad, la libertad de acción, un sacrificio voluntario de la libertad y sus contrarios.

A partir de (6) tenemos

$$y = \frac{x}{z + w},$$

y desarrollando el segundo miembro, pero rechazando los términos cuyos coeficientes son 0,

$$y = \frac{1}{2}\,xzw + xz(1-w) + x(1-z)\,w + \frac{1}{0}\,x\,(1-z)\,(1-w) + \frac{0}{0}\,(1-x)\,(1-z)\,(1-w),$$

de donde, igualando a 0 los términos cuyos coeficientes sean $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{0}$ tenemos

$$y = xz\,(1 - w) + xw\,(1 - z) + v\,(1 - x)(1 - z)(1 - w); \quad (7)$$

$$xzw = 0; \quad (8)$$

$$x\,(1 - z)\,(1 - w) = 0; \quad (9)$$

de donde, por interpretación

CONCLUSION DIRECTA.– *Seres racionales son todos los seres responsables que o bien son libres para actuar, al no haber sacrificado voluntariamente su libertad, o bien no son libres para actuar, al haber sacrificado voluntariamente su libertad, junto con un resto indefinido (alguno, ninguno o todos) de seres no responsables, no libres y que no han sacrificado voluntariamente su libertad.*

PRIMERA RELACION INDEPENDIENTE.– *Ningún ser responsable es a la vez libre para actuar y sujeto a la condición de haber sacrificado voluntariamente su libertad.*

SEGUNDA.– *Ningún ser responsable es no–libre para actuar, y a la vez sujeto a la condición de no haber sacrificado su libertad.*

Las relaciones independientes determinadas más arriba, pueden ponerse, sin embargo, de una forma más conveniente. Así (8) da

$$xw = \frac{0}{z} = 0\,z + \frac{0}{0}\,(1 - z), \quad \text{al desarrollar}$$

o

$$xw = v\,(1 - z); \quad (10)$$

y del mismo modo (9) da

$$x\,(1 - w) = \frac{0}{1 - z} = \frac{0}{0}\,z + 0\,(1 - z);$$

o

$$x\,(1 - w) = vz; \quad (11)$$

e interpretadas (10) y (11) dan las siguientes proposiciones:

PRIMERO.– *Los seres responsables que han sacrificado voluntariamente su libertad no son libres.*

SEGUNDO.– *Los seres responsables que no han sacrificado voluntariamente su libertad son libres.*

Estas son, sin embargo, simplemente formas diferentes de las relaciones antes determinadas.

16. Examinando estos resultados, el lector debe tener presente que la única competencia de un método de inferencia o análisis es determinar aquellas relaciones que resultan por necesidad de la *conexión* de los términos en la proposición original. De acuerdo con esto, a la hora de estimar la completitud con que se lleva a cabo este propósito, no tenemos nada que hacer con aquellas otras relaciones que puede sugerir a nuestra mente el *significado* de los términos empleados en tanto que distintos de su conexión expresada. Así parece obvio señalar que "Los que han sacrificado voluntariamante su libertad no son libres", al ser ésta una relación implícita en el verdadero significado de los términos. Y a partir de aquí puede aparecer que la primera de las dos relaciones independientes asignadas por el método, sea, por una parte innecesariamente limitada, y por otra, sea supérflua. Sin embargo, con solamente una mirada a la conexión de los términos en las premisas originales, se verá que la relación en cuestión no está sujeta a ninguno de estos cargos. La solución, tal y como está expresada en la conclusión directa y en las relaciones independientes conjuntamente, es perfectamente completa, sin ser de ninguna manera superflua.

Si queremos tener en cuenta la relación implícita a que nos referimos más arriba, a saber "Los que han sacrificado voluntariamente su libertad no son libres", podemos hacerlo tomándola como una proposición diferenciada, cuya expresión propia sería

$$w = v\,(1 - z).$$

Esta ecuación habremos de emplearla junto con aquella que expresa la premisa original. El modo en el que puede llevarse a cabo tal examen se hará manifiesto cuando entremos en la teoría de los sistemas de proposiciones en un capítulo futuro. La única diferencia de resultado a que conduce el análisis es que la primera de las relaciones independientes deducidas más arriba es sustituida.

17. Ejemplo 4.— Asumiendo la misma definición que en el ejemplo 2, pídasenos obtener una descripción de las personas irracionales.

Tenemos

$$1 - y = 1 - \frac{x}{z + w}$$

$$= \frac{z + w - x}{z + w}$$

$$= \frac{1}{2}\,xzw + 0\,xz\,(1 - w) + 0\,x\,(1 - z)\,w - \frac{1}{0}\,x\,(1 - z)\,(1 - w)$$

$$+ (1-x)zw + (1-x)z(1-w) + (1-x)(1-z)w + \frac{0}{0}(1-x)(1-z)(1-w)$$

$$= (1-x)zw + (1-x)z(1-w) + (1-x)(1-z)w + v(1-x)(1-z)(1-w)$$

$$= (1-x)\,z + (1-x)\,(1-z)\,w + v\,(1-x)\,(1-z)\,(1-w),$$

con

$$xzv = 0, \qquad x\,(1 - z)\,(1 - v) = 0.$$

Las relaciones independientes dadas aquí son las mismas a que hemos llegado más arriba, como evidentemente debería ser, puesto que cualesquiera relaciones que prevalezcan independientemente de la existencia de una clase dada de objetos y, también prevalece independientemente de la existencia de la clase contraria $1 - y$.

La solución directa proporcionada por la primera ecuación es: *Las personas irracionales son todos los seres irresponsables que o bien son libres para actuar, o han sacrificado voluntariamente su libertad, y no son libres para actuar; junto con un resto indefinido de seres irresponsables que no han sacrificado su libertad, y no son libres para actuar.*

18. Las proposiciones analizadas en este capítulo han sido de aquella especie llamada definiciones. No he discutido ninguna de aquellas cuyo segundo término o predicado es particular, y cuyo tipo general es $Y = vX$, siendo Y y X funciones de los símbolos lógicos x, y, z, etc., y v un símbolo de clase indefinida. El análisis de tales proposiciones se facilita grandemente (aunque el paso no sea esencial) mediante la eliminación del símbolo v, y este proceso depende del método del siguiente capítulo. Pospongo también la consideración de otro importante problema necesario para completar la teoría de las proposiciones simples, pero cuyo análisis depende realmente del método de reducción de sistemas de proposiciones, a desarrollar en una página futura de esta obra.

CAPITULO VII

SOBRE LA ELIMINACION

1. En los ejemplos discutidos en el último capítulo, todos los elementos de la premisa original reaparecían en la conclusión, aunque en un orden diferente, y con una diferente conexión. Pero en un razonamiento común ocurre con más frecuencia, y especialmente cuando tenemos más de una premisa, que se pida que alguno de los elementos no aparezca en la conclusión. Tales elementos, o como se los llama más comúnmente, "términos medios", pueden considerarse como introducidos en las proposiciones originales sólo en atención a aquella conexión que ayudan a establecer entre los otros elementos, que son los únicos que se proyecta que entren en la expresión de la conclusión.

2. Respecto a estos elementos intermedios, o términos medios, prevalecen algunas nociones erróneas. Es una opinión generalizada a la que, sin embargo, los ejemplos contenidos en el último capítulo contradicen, que la inferencia consiste peculiarmente en la eliminación de tales términos, y que el tipo elemental de este proceso se exhibe en la eliminación de un término medio a partir de dos premisas, de modo tal que produce una sóla conclusión resultante, en la cual no entra este término. A partir de esto se sostiene comúnmente que el *silogismo* es la base, o si no el tipo común de toda inferencia, la cual podemos descomponer, por muy compleja que sea su forma y estructura, en una serie de silogismos. La corrección de este punto de vista se considerará en un capítulo subsiguiente. Por el momento dedicaré una atención directa a un importante, pero hasta ahora inadvertido, punto de diferencia entre el sistema de la Lógica, en tanto que expresado por símbolos, y el del álgebra común, con referencia a la cuestión de la eliminación. En el sistema algebraico se puede eliminar un símbolo a partir de dos ecuaciones, dos símbolos a partir de tres ecuaciones, y en general $n - 1$ símbolos a partir de n ecuaciones. Así pues, existe allí una conexión definida entre el número de ecuaciones independientes dado, y el número de símbolos de cantidad que es posible eliminar de ellas. Pero en el sistema de la Lógica ocurre de otra manera. Aquí no prevalece ninguna conexión entre el número de ecuaciones dado que representan proposiciones o premisas, y el número de símbolos típicos cuya eliminación se puede efectuar. A partir de una única ecuación pueden eliminarse un número indefinido de tales sím-

bolos. Por otra parte, a partir de un número indefinido de ecuaciones, sólo puede eliminarse un único símbolo de clase. Podemos afirmar que en este sistema particular, el problema de la Eliminación se puede resolver igualmente en todas las circunstancias. Esto es una consecuencia de aquella notable ley de la dualidad a la cual están sujetos los símbolos de la Lógica. A las ecuaciones proporcionadas por las premisas dadas, se añade otra ecuación o sistema de ecuaciones extraídos a partir de las leyes fundamentales del pensamiento mismo, y que proporcionan los medios necesarios para la solución del problema en cuestión. De las muchas consecuencias que se derivan de la ley de la dualidad, ésta es quizá la que mayor atención merece.

3. Como ocurre a menudo en Algebra, en que la eliminación de símbolos a partir de un sistema dado de ecuaciones conduce a una mera identidad de la forma $0 = 0$, sin que ninguna relación independiente conecte los símbolos que subsisten; así, en el sistema de la Lógica, admitiendo una interpretación similar, puede presentarse un resultado parecido. Tal circunstancia no desvirtua la generalidad del principio anteriormente establecido. El objeto del método que vamos a investigar ahora es eliminar cualquier número de símbolos a partir de cualquier número de ecuaciones lógicas, y mostrar en el resultado las relaciones efectivas que permanecen. Ahora bien, puede ser que no existan tales relaciones residuales. En tal caso, la verdad del método se muestra porque nos conduce a una proposición meramente idéntica.

4. La notación adoptada en las siguientes proposiciones es similar a la del último capítulo. Por *f(x)* se entiende cualquier expresión que contenga el símbolo lógico x, con o sin otros símbolos lógicos. Por *f(1)* se entiende lo que *f(x)* llega a ser cuando en ella se sustituye x por *1*; por *f(0)* lo que la misma función llega a ser cuando se sustituye x por *0*.

PROPOSICION I

5. *Si f(x) = 0 es cualquier ecuación lógica que contiene el símbolo de clase x, con o sin otros símbolos de clase, entonces será verdadera la ecuación*

$$f(1)\ f(0) = 0$$

independientemente de la interpretación de x; y será el resultado completo de la eliminación de x en la anterior ecuación. En otras palabras, la eliminación de x de una ecuación dada, f(x) = 0, se efectuará mediante sucesivas sustituciones en esta ecuación de x por 1 y de x por 0, y multiplicando las dos ecuaciones resultantes.

De manera similar, el resultado completo de la eliminación de cualesquiera símbolos de clase x, y, etc. de cualquier ecuación de la forma V = 0, se obtendrá desarrollando completamente el primer miembro de esta ecuación en los constituyentes de los símbolos dados, y multiplicando los coeficientes de aquellos constituyentes, e igualando el producto a 0.

Desarrollando el primer miembro de la ecuación $f(x) = 0$ tenemos (V.10)

$$f(1)\,x + f(0)\,(1 - x) = 0;$$

o

$$\{f(1) - f(0)\}\,x + f(0) = 0. \qquad (1)$$

$$\therefore\ x = \frac{f(0)}{f(0) - f(1)};$$

y

$$1 - x = -\frac{f(1)}{f(0) - f(1)}.$$

sustitúyanse estas expresiones por x y $1 - x$ en la ecuación fundamental

$$x\,(1 - x) = 0,$$

y allí resulta

$$-\frac{f(0)\,f(1)}{\{f(0) - f(1)\}^2} = 0;$$

o

$$f(1)\,f(0) = 0, \qquad (2)$$

la fórmula buscada.

6. Se ve en este proceso que la eliminación se efectúa entre la ecuación dada f(x) = 0 y la ecuación universalmente verdadera x(1 − x) = 0, que expresa la ley fundamental de los símbolos lógicos *qua* lógicos. No existe, por lo tanto, ninguna necesidad de más de una premisa o ecuación para hacer posible la eliminación de un término al ofrecer virtualmente la ley necesaria del pensamiento la otra premisa o ecuación. Y aunque la demostración de esta conclusión puede mostrarse en otras formas, sin embargo el mismo elemento que la misma mente facilita estará presente virtualmente. De este modo podemos proceder como sigue:

Multipliquemos (1) por x, y tenemos

$$f(1)\,x = 0, \qquad (3)$$

y busquemos mediante las fórmulas del álgebra común eliminar x de esta ecuación y de (1).

Ahora bien, si tenemos dos ecuaciones algebraicas de la forma

$$ax + b = 0,$$
$$a'x + b' = 0;$$

es bien sabido que el resultado de la eliminación de x es

$$ab' - a'b = 0. \qquad (4)$$

Pero comparando el anterior par de ecuaciones con (1) y (3) respectivamente hallamos

$$a = f(1) - f(0), \qquad b = f(0);$$
$$a' = f(1) \qquad\qquad b' = 0;$$

las cuales, sustituyendo en (4) dan

$$f(1)\,f(0) = 0,$$

como anteriormente. En esta forma de la demostración, la ecuación fundamental $x(1 - x) = 0$ aparece en la derivación de (3) a partir de (1).

7. Añadiré aún otra forma de demostración que participa de un carácter medio lógico, y que puede plantear la demostración de este importante teorema bajo una luz más clara.

Tenemos como antes

$$f(1)\,x + f(0)\,(1 - x) = 0.$$

Multiplicando esta ecuación primero por x y seguidamente por $1 - x$, obtenemos

$$f(1)\,x = 0, \qquad f(0)\,(1 - x) = 0.$$

De estas tenemos por solución y desarrollo

$$f(1) = \frac{0}{x} = \frac{0}{0}\,(1 - x), \text{ al desarrollar,}$$

$$f(0) = \frac{0}{1 - x} = \frac{0}{0}\,x.$$

La interpretación directa de estas ecuaciones es:

PRIMERO.– Cualesquiera individuos incluidos en la clase representada por *f(1)* no son x.

SEGUNDO.– Cualesquiera individuos incluidos en la clase representada por *f(0)* son x.

De donde, por Lógica común, no existen individuos en la clase *f(1)* y en la clase *f(0)* a la vez, es decir, no hay individuos en la clase *f(1) f(0)*. Por lo tanto

$$f(1)\,f(0) = 0. \qquad (5)$$

O sería suficiente multiplicar las ecuaciones desarrolladas, de donde el resultado se seguiría inmediatamente.

8. El teorema (5) nos provee de la siguiente Regla:

PARA ELEMINAR CUALQUIER SIMBOLO DE UNA ECUACION PROPUESTA.

REGLA.– *Habiendo sido llevados, por transposición si es necesario, los términos de una ecuación al primer lado, dar al símbolo sucesivamente los valores 1 y 0, multiplicar las ecuaciones resultantes.*

La primera parte de la Proposición está probada.

9. Consideremos a continuación la ecuación general

$$f(x, y) = 0;$$

el primer miembro de la cual representa cualquier función de x, y, y otros símbolos.

Por lo que he mostrado, el resultado de la eliminación de y de esta ecuación será

$$f(x, 1) f(x, 0) = 0;$$

pues tal es la forma a que llegamos cambiando sucesivamente en la ecuación dada y por 1, e y por 0, y multiplicando los resultados conjuntamente.

Además, si en el resultado obtenido cambiamos sucesivamente x por 1, y x por 0, y multiplicando los resultados conjuntamente, tenemos

$$f(1, 1) f(1, 0) f(0, 1) f(0, 0) = 0; \qquad (6)$$

como resultado final de la eliminación.

Pero los cuatro factores del primer miembro de esta ecuación son los cuatro coeficientes de la expansión completa de $f(x,y)$, el primer miembro de la ecuación original; de donde es manifiesta la segunda parte de la Proposición.

EJEMPLOS

10. Ejemplo 1.– Dada la Proposición "todos los hombres son mortales", y su expresión simbólica en la ecuación

$$y = vx,$$

en la que y representa "hombres", y x "mortales", se pide eliminar el símbolo de clase indefinida v e interpretar el resultado.

Llevando los términos al primer lado, tenemos

$$y - vx = 0.$$

cuando $v = 1$, se convierte en

$$y - x = 0;$$

y cuando $v = 0$, se convierte en

$$y = 0;$$

y multiplicando estas dos ecuaciones dan

$$y - yx = 0,$$

o $$y(1 - x) = 0,$$

observándose que $y^2 = y$.

La anterior ecuación es el resultado pedido de la eliminación, y su interpretación es *–Hombres que no son mortales no existen–* una conclusión obvia.

Si a partir de la última ecuación obtenida buscamos una descripción de seres que no son mortales, tenemos

$$x = \frac{y}{y},$$

$$\therefore\ 1 - x = \frac{0}{y}.$$

De donde, por expansión, $1 - x = \frac{0}{0}(1 - y)$, que interpretada da *Aquellos que no son mortales no son hombres*. Esto es un ejemplo de lo que en Lógica común se llama conversión por contraposición, o conversión negativa (6).

Ejemplo 2.– Tomando la Proposición "Ningún hombre es perfecto" como representada por la ecuación

$$y = v(1 - x),$$

donde y representa "hombres", y x "seres perfectos", se requiere eliminar v, y encontrar a partir del resultado una descripción tanto de *seres perfectos* como de *seres imperfectos*. Tenemos

$$y - v(1 - x) = 0.$$

De donde, por la regla de eliminación

$$\{y - (1 - x)\} \times y = 0,$$

o $$y - y(1 - x) = 0,$$

o $$yx = 0;$$

que se interpreta por la Proposición *Hombres perfectos no existen*. De la ecuación anterior tenemos

$$x = \frac{0}{y} = \frac{0}{0}(1 - y), \text{ por desarrollo}$$

de donde, por interpretación, *Ningún ser perfecto es hombre*. Del mismo modo

$$1 - x = 1 - \frac{0}{y} = \frac{y}{y} = y + \frac{0}{0}(1 - y),$$

la cual, al interpretarla da, *Seres imperfectos son todos los hombres, con un resto indefinido de seres que no son hombres.*

11. De manera general el camino más conveniente al tratar las Proposiciones será eliminar primero el símbolo de clase indefinida v, dondequiera que se presente en las correspondientes ecuaciones. Esto únicamente modificará su forma, sin alterar su significado. Apliquemos este proceso a uno de los ejemplos del capítulo IV. Para la Proposición "Ningún hombre de elevada posición se ve libre de miradas envidiosas", hallamos la expresión

$$y = v(1 - xz),$$

y para la Proposición equivalente "Hombres de elevada posición no se ven libres de miradas envidiosas", la expresión

$$yx = v(1 - z);$$

y se observó que estas ecuaciones, siendo v un símbolo de clase indefinida, eran equivalentes. Para probar esto, es únicamente necesario eliminar de cada una de ellas el símbolo v. La primera ecuación es

$$y - v(1 - xz) = 0,$$

de donde, haciendo primeramente $v = 1$, y después $v = 0$, y multiplicando los resultados, tenemos

$$(y - 1 + xz)\, y = 0,$$

o

$$yxz = 0.$$

Ahora bien, la segunda ecuación de las dadas se convierte por transposición

$$yx - v(1 - z) = 0;$$

de donde

$$(yx - 1 + z)\, yx = 0,$$

o

$$yxz = 0,$$

como anteriormente. El lector interpretará fácilmente el resultado.

12. Ejemplo 3.– Como tema para el método general de este capítulo resumiremos la definición de la riqueza del Sr. Senior, a saber: "La riqueza consiste en cosas transferibles, limitadas en cuanto a la oferta y, o bien productoras de placer o preventivas del dolor". Consideraremos esta definición, de modo conforme con una anterior observación, como incluyendo todas las cosas que poseen a la vez ambas cualidades expresadas en la última parte de la definición, asunción bajo la cual tenemos como nuestra ecuación representativa

$$w = st\,\{pr + p(1 - r) + r(1 - p)\},$$

o

$$w = st\{p + r(1 - p)\},$$

donde

w significa riqueza.

s significa cosas limitadas en cuanto a la oferta.

t significa cosas transferibles.

p significa cosas productoras de placer.

r significa cosas preventivas del dolor.

A partir de la ecuación anterior podemos eliminar cualesquiera que no deseemos tener en cuenta, y expresar el resultado por solución y desarrollo, de acuerdo con cualquier distribución propuesta del sujeto y el predicado.

Consideremos primero lo que la expresión para w, riqueza, sería si el elemento r, que se refiere a la prevención del dolor, fuese eliminado. Ahora bien, llevando los términos de la ecuación al primer lado obtenemos

$$w - st(p + r - rp) = 0.$$

Haciendo r = 1, el primer miembro se convierte en $w–st$, y haciendo $r = 0$ se convierte en $w–stp$; de donde tenemos por la Regla

$$(w - st)(w - stp) = 0, \qquad (7)$$

o

$$w - wstp - wst + stp = 0; \qquad (8)$$

de donde

$$w = \frac{stp}{st + stp - 1};$$

el desarrollo del segundo miembro de tal ecuación da

$$w = stp + \frac{0}{0} st(1 - p). \qquad (9)$$

De donde tenemos la conclusión – *La riqueza consiste en todas las cosas limitadas en cuanto a la oferta, transferibles y productoras de placer, y un resto indefinido de cosas limitadas en cuanto a la oferta, transferibles y no productoras de placer.* Esto es suficientemente obvio.

Obsérvese que no es necesaria la multiplicación indicada en (7) y reducir aquella ecuación a la forma (8) para determinar la expresión de w en términos de los otros símbolos. El proceso de desarrollo puede hacerse en todos los casos reemplazando el de la multiplicación. Así, si desarrollamos (7) en términos de w hallamos

$$(1 - st)(1 - stp)w + stp(1 - w) = 0,$$

de donde

$$w = \frac{stp}{stp - (1 - st)\,(1 - stp)};$$

y esta ecuación desarrollada nos dará, como antes

$$w = stp + \frac{0}{0}\, st\,(1 - p).$$

13. Supongamos a continuación que buscamos una descripción de las cosas limitadas en cuanto a la oferta en cuanto dependiente de su relación con la riqueza, transferibilidad y tendencia a producir placer, omitiendo toda referencia a la prevención del dolor.

De la ecuación (8), que es el resultado de la eliminación de r de la ecuación original, tenemos

$$w - s\,(wt + wtp - tp) = 0;$$

de donde

$$s = \frac{w}{wt + wtp - tp}$$

$$= wtp + wt\,(1 - p) + \frac{1}{0}\, w\,(1 - t)\,p + \frac{1}{0}\, w\,(1 - t)\,(1 - p)$$

$$+ 0\,(1 - w)\,tp + \frac{0}{0}(1 - w)\,t\,(1 - p) + \frac{0}{0}(1 - w)\,(1 - t)\,p$$

$$+ \frac{0}{0}(1 - w)\,(1 - t)\,(1 - p).$$

Daremos, en primer lugar, la interpretación directa de la anterior solución término por término; después ofreceremos algunas consideraciones generales que sugiere; y finalmente, mostraremos cómo la expresión de la conclusión puede ser de algún modo abreviada.

Primero, pues, la interpretación directa es, Las cosas limitadas en cuanto a la oferta consisten en *Toda riqueza transferible y productora de placer –toda riqueza transferible y no productora de placer–, una cantidad indefinida de lo que no es riqueza, pero o es transferible y no productora de placer, o intransferible y productora de placer, o ni transferible ni productora de placer.*

A lo que los términos cuyos coeficientes son $\frac{1}{0}$ nos permiten añadir las siguientes relaciones independientes, a saber:

PRIMERO.– *La riqueza que es intransferible y productora de placer no existe.*

SEGUNDO.– *La riqueza que es intransferible y no productora de placer no existe.*

14. Respecto a esta solución supongo que pueden hacerse las siguientes consideraciones.

Primero, podría decirse que en la expresión obtenida más arriba para "cosas limitadas en cuanto a la oferta", el término "Toda riqueza transferible" etc. es en parte redundante; puesto que toda riqueza es (como se implica en la proposición original, y se aserta directamente en las *relaciones independientes)* necesariamente transferible.

Respondo que, aunque en el lenguaje ordinario no juzgaríamos necesario añadir a "riqueza" el epíteto "transferible" si otra parte de nuestro razonamiento nos hubiese llevado a expresar la conclusión de que no hay riqueza que no sea transferible, sin embargo, es pertinente para la perfección de este método que en todos los casos defina enteramente los objetos representados por cada término de la conclusión, manifestando la relación en que se hallan con cada cualidad o elemento de distinción que hemos elegido emplear. Esto es necesario para mantener las partes de la solución realmente distintas e independientes, y de hecho previene la redundancia. Supongamos que el par de términos que estamos considerando no hubiese contenido la palabra "transferible" y hubiese sido "toda la riqueza"; podríamos entonces logicamente descomponer el término simple "toda la riqueza" en los dos términos "toda la riqueza transferible" y "toda la riqueza intransferible". Pero se verá que el último término desaparece por las "relaciones independientes". De aquí que no forme parte de la descripción requerida y sea por ello redundante. El término que resta está en concordancia con la conclusión de hecho obtenida.

Las soluciones en las que, por divisiones lógicas, no puedan producirse términos superfluos o redundantes, pueden llamarse *soluciones puras.* Tales son todas las soluciones obtenidas por el método de desarrollo y eliminación explicadas más arriba. Es conveniente hacer notar que si se adoptase el método común algebraico de eliminación en los casos en los que este método es posible en el presente sistema, no podríamos depender de la pureza de las soluciones obtenidas. Su falta de generalidad no sería su único defecto.

15. En segundo lugar, haremos notar que la conclusión contiene dos términos, cuya significación conjunta estaría más convenientemente expresada por un término único. En lugar de "toda riqueza productora de placer y transferible" y "toda riqueza no productora de placer y transferible" podemos decir simplemente "toda riqueza transferible". Esta observación es muy justa. Pero debe repararse en que cuando quiera que cualesquiera de tales simplificaciones sean posibles, están sugeridas inmediatamente por la forma de la ecuación que tenemos que interpretar; y si esta ecuación se reduce a su forma más simple, entonces la interpretación a la que conduce estará también en su forma más simple. Así en la solución original los términos wtp y wt(1 − p) que tienen la unidad por coeficiente, dan al sumarlos wt; los términos w(1 − t)p y w(1 − t) (1 − p), que tienen por coeficiente $\frac{1}{0}$, dan (1 − w) (1 − t). De donde la solución completa es

$$s = wt + \frac{0}{0}(1 - w)\ (1 - t) + \frac{0}{0}\ (1 - w)\, t\ (1 - p),$$

con la relación independiente

$$w(1 - t) = 0, \text{ o } w = \frac{0}{0}t.$$

la interpretación quedaría ahora así:

PRIMERO.– *Las cosas limitadas en cuanto a la oferta consisten en toda riqueza transferible, con un resto indefinido de lo que no es riqueza y no es transferible, y de artículos transferibles que no son riqueza y no producen placer.*

SEGUNDO.– *Toda riqueza es transferible.*

Esta es la forma más simple bajo la cual puede ponerse la conclusión general con su condición concomitante.

16. Cuando se requiere eliminar dos o más símbolos de una ecuación propuesta podemos, o bien emplear (6) Proposición I, o eliminarlos sucesivamente, siendo indiferente el orden del proceso. A partir de la ecuación

$$w = st(p + r - pr),$$

hemos eliminado r, y hallado el resultado

$$w - wst - wstp + stp = 0.$$

Supongamos que se requería eliminar r y t, entonces, tomando lo anterior como primer paso del proceso, queda por eliminar de la última ecuación t. Ahora bien, cuando $t = 1$, el primer miembro de esta ecuación se convierte en

$$w - ws - wsp + sp,$$

y cuando $t = 0$ el mismo miembro se convierte en w. De donde tenemos

$$w(w - ws - wsp + sp) = 0,$$

o

$$w - ws = 0,$$

para el resultado de eliminación requerido.

Si a partir del último resultado determinamos w, tenemos

$$w = \frac{0}{1 - s} = \frac{0}{0}s,$$

de donde "*toda riqueza es limitada en cuanto a la oferta*". Como p no entra en la ecuación, es evidente que lo anterior es verdadero, sin tener en cuenta cualquier relación en la que los elementos de la conclusión se hallen con relación a la cualidad "productora de placer".

Resumiendo la ecuación original, pídase eliminar s y t. Tenemos

$$w = st(p + r - pr).$$

Sin embargo, en vez de eliminar separadamente s y t, de acuerdo con la Regla, será suficiente tratar st como un símbolo único, en vista de que satisface la ley fundamental de los símbolos por la ecuación

$$st\,(1 - st) = 0.$$

Poniendo, por tanto, la ecuación dada bajo la forma

$$w - st\,(p + r - pr) = 0;$$

y haciendo st sucesivamente igual a 1 y a 0, y tomando el producto de los resultados, tenemos

$$(w - p - r + pr)\,w = 0,$$

o

$$w - wp - wr + wpr = 0,$$

para el resultado buscado.

Como ilustración particular, pídase deducir un modo de expresar "cosas productoras de placer" (p) en términos de "riqueza" (w) y "cosas preventivas del dolor" (r).

Tenemos, al resolver la ecuación

$$p = \frac{w\,(1 - r)}{w\,(1 - r)}$$

$$= \frac{0}{0}\,wr + w(1 - r) + \frac{0}{0}\,(1 - w)\,r + \frac{0}{0}\,(1 - w)\,(1 - r)$$

$$= w\,(1 - r) + \frac{0}{0}\,wr + \frac{0}{0}\,(1 - w).$$

De donde la siguiente conclusión: —*Cosas productoras de placer son toda riqueza no preventiva del dolor, una cantidad indefinida de riqueza preventiva del dolor, y una cantidad indefinida de lo que no es riqueza.*

De la misma ecuación obtenemos

$$1 - p = 1 - \frac{w\,(1 - r)}{w\,(1 - r)} = \frac{0}{w\,(1 - r)},$$

que desarrollada da

$$w\,(1 - p) = \frac{0}{0}\,wr + \frac{0}{0}\,(1 - w)\,.\,r + \frac{0}{0}\,(1 - w)\,.\,(1 - r)$$

$$= \frac{0}{0}\,wr + \frac{0}{0}\,(1 - w).$$

De donde, *Cosas no productoras de placer son o la riqueza, preventiva del dolor, o lo que no es riqueza.*

Igualmente fácil sería la discusión de cualquier caso similar.

17. En el último ejemplo de eliminación hemos eliminado el símbolo compuesto *st* a partir de la ecuación dada, tratándolo como un símbolo simple. El mismo método es aplicable a cualquier combinación de símbolos que satisfaga la ley fundamental de los símbolos individuales. Así, la expresión $p + r - pr$, al multiplicarse por sí misma, se reproducirá, de tal modo que si representamos $p + r - pr$ por un símbolo único como y, tendremos cumplida la ley fundamental, al ser satisfecha la ecuación

$$y = y^2, \text{ o } y(1 - y) = 0,$$

Pues la regla de la eliminación para símbolos se funda en la suposición de que cada símbolo individual está sujeto a esa ley; y de aquí que la eliminación de cualquier función o combinación de tales símbolos a partir de una ecuación pueda efectuarse mediante una única operación, siempre que esta ley sea satisfecha por la función.

Aunque las formas de interpretación adoptadas en este y el capítulo previo muestren, quizás mejor que cualesquiera otras, el significado directo de los símbolos 1 y $\frac{0}{0}$, pueden emplearse modos de expresión más conformes que aquellos del discurso común, con igual veracidad y corrección. Así la ecuación (9) puede interpretarse de la siguiente manera: *La riqueza es, o bien limitada en cuanto a la oferta, transferible y productora de placer, o bien limitada en cuanto a la oferta, transferible y no productora de placer*, y al contrario, *Todo lo que es limitado en cuanto a la oferta, transferible y productor de placer es riqueza.* Interpretaciones contrarias, similares a la anterior se proporcionan siempre cuando el desarrollo final introduce términos que tienen la unidad como coeficiente.

18. NOTA.— La ecuación fundamental $f(1)\, f(0)$ que expresa el resultado de la eliminación del símbolo x a partir de cualquier ecuación $f(x) = 0$, admite una interpretación notable.

Debe recordarse que por la ecuación $f(x) = 0$ se implica cualquier proposición a la cual los individuos representados por la clase x, supongamos "hombres", se refieren, junto, quizás, con otros individuos; y es nuestro objetivo averiguar si está implicada en la proposición cualquier relación entre los otros individuos, independientemente de aquellas que hallamos en la clase *hombres*. Ahora bien, la ecuación $f(1) = 0$ expresa lo que la proposición original llegaría a ser si los hombres constituyesen el universo, y la ecuación $f(0) = 0$ expresa lo que aquella proposición original llegaría a ser si los hombres cesaran de existir, por tanto, la ecuación $f(1)\, f(0) = 0$ expresa lo que, en virtud de la proposición original sería igualmente cierto basándose en cualquiera de los dos supuestos, es decir, igualmente verdadera si "hombres" fueran "todas las cosas" o "nada". Por tanto el teorema expresa que *lo que es igual-*

mente verdadero, sea que una clase dada de objetos contenga la totalidad del universo o desaparezca de la existencia, es totalmente independiente de esta clase, y viceversa. Aquí vemos otro ejemplo de la interpretación de los resultados formales, deducidos inmediatamente a partir de las leyes matemáticas del pensamiento, en axiomas generales de la Filosofía.

REFERENCIAS

(6) Whately. Lógica, Libro II, Capítulo II, sección 4.

CAPITULO VIII

SOBRE LAS REDUCCIONES DE SISTEMAS DE PROPOSICIONES

1. En los capítulos precedentes hemos determinado suficientemente, para los propósitos más esenciales, la teoría de las proposiciones primarias simples, o, para hablar con más precisión, de las proposiciones primarias expresadas por una única ecuación. Y hemos establecido sobre esta teoría un método adecuado. Hemos mostrado cómo cualquier elemento incluido en un sistema dado de ecuaciones puede eliminarse, y la relación que conecta los elementos que quedan, deducidos de cualquier forma propuesta, sean denegaciones, afirmaciones o la relación más corriente entre sujeto y predicado. Resta que procedamos a la consideración de los sistemas de proposiciones, y que iniciemos con respecto a ellos una serie similar de investigaciones. Hemos de investigar si es posible a partir de las ecuaciones por las que se expresa un sistema de proposiciones eliminar *ad libitum* cualquier número de símbolos que contengan; deducir por interpretación del resultado la totalidad de las relaciones implicadas entre los restantes símbolos; y determinar en particular la expresión de cualquier elemento simple, o de cualquier combinación interpretable de elementos en términos de los otros elementos, como para presentar la conclusión en cualquier forma admisible que pueda requerirse. Estas cuestiones se responderán mostrando que es posible reducir cualquier sistema de ecuaciones o cualesquiera de las ecuaciones pertenecientes a un sistema a una ecuación única equivalente, para lo cual los métodos del capítulo previo pueden aplicarse inmediatamente. Se verá también que en esta reducción se contiene una importante extensión de la teoría de las proposiciones simples, que en la discusión previa del tema nos vimos obligados a adelantar. Esta circunstancia no es particular por su naturaleza. Existen muchos apartados especiales de la ciencia que no pueden ser estudiados desde dentro, sino que requieren ser estudiados también desde un punto externo, y contemplarlos en conexión con otros temas afines, a fin de que se puedan comprender todas sus proporciones.

Este capítulo mostrará dos maneras distintas de reducir sistemas de ecuaciones a ecuaciones simples equivalentes. El primero de ellos descansa sobre el empleo de multiplicadores constantes arbitrarios. Es un método suficientemente simple en teoría, pero tiene el inconveniente de hacer los subsecuentes procesos de eliminación y desarrollo, cuando estos se presentan, de algún modo tediosos. Fue, sin

embargo, el primer método de reducción descubierto, y en parte por esta razón, y en parte por su simplicidad, se ha pensado que es conveniente retenerlo. El segundo método no requiere la introducción de constantes arbitrarias, y es en casi todos los aspectos preferible al precedente. Será, por tanto, adoptado generalmente en las subsiguientes investigaciones de esta obra.

2. Procedemos a la consideración del primer método.

PROPOSICION I

Cualquier sistema de ecuaciones lógicas se puede reducir a una ecuación equivalente única multiplicando cada ecuación después de la primera por una cantidad constante arbitraria distinta, y sumando todos los resultados, incluida la primera ecuación.

Por la Proposición II, Capítulo VI, la interpretación de cualquier ecuación simple f(x,y..) = 0 se obtiene igualando a 0 aquellos constituyentes del desarrollo del primer miembro cuyos coeficientes no se hagan iguales a cero. Y de aquí, si fuesen dadas dos ecuaciones, f(x,y..) = 0 y F(x,y..) = 0, su significación unida se contendrá en el sistema de resultados formado al igualar a 0 todos aquellos constituyentes que se presentan de este modo en ambas, o en alguna de las dos ecuaciones dadas desarrolladas de acuerdo con la regla del Capítulo VI. De este modo supóngase que tenemos las dos ecuaciones

$$xy - 2x = 0, \tag{1}$$

$$x - y = 0\,; \tag{2}$$

El desarrollo de la primera da

$$-xy - 2x(1-y) = 0\,;$$

de donde

$$xy = 0, \quad x(1-y) = 0. \tag{3}$$

El desarrollo de la segunda da

$$x(1-y) - y(1-x) = 0\,;$$

de donde

$$x(1-y) = 0, \quad y(1-x) = 0. \tag{4}$$

Los constituyentes cuyos coeficientes no se igualan a cero en ambos desarrollos son xy, x(1–y) y (1–x)y, y estos juntos darían el sistema

$$xy = 0, \quad x(1-y) = 0, \quad (1-x)y = 0\,; \tag{5}$$

el cual es equivalente a los dos sistemas dados por los desarrollos separadamente, viéndose que en estos sistemas la ecuación x(1–y) = 0 se repite. Ciñéndonos al caso de los sistemas binarios de ecuaciones,resta por determinar una ecuación única que, al desarrollarse ofrezca los mismos constituyentes con coeficientes que no se igualen a cero, como las ecuaciones dadas producen.

Ahora bien, si representamos las ecuaciones dadas por

$$V_1 = 0, \quad V_2 = 0,$$

siendo V_1 y V_2 funciones de los símbolos lógicos x, y, z, etc., entonces la ecuación simple

$$V_1 + cV_2 = 0, \tag{6}$$

siendo c una cantidad arbitraria constante, cumplirá el objeto requerido. Pues represente At cualquier término en el desarrollo total V_1 en el que t es un constituyente y A su coeficiente numérico, y represente Bt el término correspondiente en el desarrollo completo de V_2, entonces el término correspondiente en el desarrollo de (6) será

$$(A + cB)\, t.$$

El coeficiente de t se iguala a cero si A y B se igualan a cero, pero no de otro modo. Porque si presuponemos que ni A ni B se igualan a cero, y al mismo tiempo hacemos

$$A + cB = 0, \tag{7}$$

sólo pueden presentarse los siguientes casos:

PRIMERO.— Que A se haga cero y B no se haga cero. En este caso la ecuación dada se convertirá en

$$cB = 0,$$

y requiere que $c = 0$. pero esto contradice la hipótesis de que c es una constante *arbitraria.*

SEGUNDO.— Que B se haga cero y A no se haga cero. Este supuesto reduce (7) a

$$A = 0,$$

por lo cual el supuesto mismo resulta violado.

TERCERO.— Que ni A ni B se igualen a 0. La ecuación (7) da de este modo

$$c = \frac{-A}{B},$$

que es un valor definido, y por tanto conflictúa con la hipóstesis de que c es arbitrario.

De aquí que el coeficiente de $A + cB$ se iguale a 0 cuando A y B se igualen a 0, pero no en otro caso. Por tanto, los mismos constituyentes aparacerán en el desarrollo de (6), con coeficientes que no se igualan a 0, como en las ecuaciones $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, por separado o juntas. Y la ecuación $V_1 + cV_2 = 0$, será equivalente al sistema $V_1 = 0$, $V_2 = 0$.

Por un razonamiento similar se hace patente que el sistema general de ecuaciones

$$V_1 = 0, \quad V_2 = 0, \quad V_3 = 0, \text{ \&c.};$$

puede reemplazarse por la ecuación única

$$V_1 + cV_2 + c'V_3 + \text{\&c.} = 0,$$

siendo c, c', etc. constantes arbitrarias. La ecuación así formada puede ser tratada en todos los aspectos como las ecuaciones lógicas ordinarias de los capítulos anteriores. Las constantes arbitrarias c_1, c_2, etc. no son símbolos *lógicos*. No satisfacen la ley

$$c_1 (1 - c_1) = 0, \quad c_2 (1 - c_2) = 0.$$

Pero su introducción está justificada por aquel principio general que ha sido expuesto en (II.15) y (V.6), y ejemplificado en casi todas nuestras investigaciones subsiguientes, a saber, que las ecuaciones que contienen los símbolos de la Lógica pueden tratarse en todos los aspectos como si aquellos símbolos fueran símbolos de cantidad, sujetos a la ley especial $x(1-x) = 0$, hasta que en la etapa final de la solución asuman una forma interpretable en aquel sistema de pensamiento sobre el que versa la Lógica.

3. El siguiente ejemplo servirá para ilustrar el método anterior.

Ejemplo 1.— Supongamos que un análisis de las propiedades de una clase particular de sustancias nos ha conducido a las siguientes conclusiones generales, a saber

PRIMERO.— Que dondequiera que las propiedades A y B están combinadas, se presenta también la propiedad C o la propiedad D; pero no se presentan las dos juntas.

SEGUNDO.— Que allí donde se combinen las propiedades B y C, las propiedades A y B se presentarán las dos juntas con ellas, o bien estarán ambas ausentes.

TERCERO.— Que allí donde las propiedades A y B estén ambas ausentes, las propiedades C y D estarán también las dos ausentes; y *viceversa*, donde las propiedades C y D estén las dos ausentes, A y B estarán ausentes también.

Pídasenos, pues, ahora, a partir de lo anterior, determinar qué se puede concluir en un caso particular a partir de la presencia de la propiedad A con respecto a la presencia o ausencia de las propiedades B y C, sin prestar atención a la propiedad D.

Representemos la propiedad A por x;
Representemos la propiedad B por y;
Representemos la propiedad C por z;
Representemos la propiedad D por w;

Entonces la expresión simbólica de las premisas será

$$xy = v\,\{w\,(1 - z) + z\,(1 - w)\};$$
$$yz = v\,\{xw + (1 - x)\,(1 - w)\};$$
$$(1 - x)\,(1 - y) = (1 - z)\,(1 - w).$$

A partir de las dos primeras ecuaciones, eliminando separadamente el símbolo de clase indefinida v, tenemos

$$xy\,\{1 - w\,(1 - z) - z\,(1 - w)\} = 0;$$
$$yz\,\{1 - xw - (1 - x)(1 - w)\} = 0.$$

Ahora bien, si observamos que por desarrollo

$$1 - w\,(1 - z) - z\,(1 - w) = wz + (1 - w)\,(1 - z),$$

y

$$1 - xw - (1 - x)(1 - w) = x\,(1 - w) + w\,(1 - x),$$

y en esas expresiones reemplazamos, para simplificar

$$1 - x \text{ por } \bar{x}, \quad 1 - y \text{ por } \bar{y}, \text{ \&c.},$$

tendremos a partir de las tres últimas ecuaciones,

$$xy\,(wz + \bar{w}\bar{z}) = 0; \qquad (1)$$

$$yz\,(x\bar{w} + \bar{x}w) = 0; \qquad (2)$$

$$\bar{x}\bar{y} = \bar{w}\,\bar{z}; \qquad (3)$$

y de este sistema debemos eliminar w.

Multiplicando la segunda de las anteriores ecuaciones por c, y la tercera por c', y sumando los resultados a la primera, tenemos

$$xy\,(wz + \bar{w}\bar{z}) + cyz\,(x\bar{w} + \bar{x}w) + c'\,(\bar{x}\bar{y} - \bar{w}\bar{z}) = 0.$$

Cuando w se hace igual a 1, y por tanto $\bar{w} = 0$, el primer miembro de la anterior ecuación se convierte en

$$xyz + c\bar{x}yz + c'\bar{x}\bar{y}.$$

Y cuando en el mismo miembro w se hace 0 y $\bar{w} = 1$, resulta

$$xy\bar{z} + cxyz + c'\bar{x}\bar{y} - c'\bar{z}.$$

De aquí que el resultado de la eliminación de w pueda expresarse en la forma

$$(xyz + c\bar{x}yz + c'\bar{x}\bar{y})\,(xy\bar{z} + cxyz + c'\bar{x}\bar{y} - c'\bar{z}) = 0; \qquad (4)$$

y a partir de esta ecuación ha de determinarse x.

Si procediéramos ahora como en casos anteriores, multiplicaríamos los factores del primer miembro de la anterior ecuación; pero puede ser conveniente mostrar que tal procedimiento no es en absoluto necesario. Desarrollemos el primer miembro de (4) con referencia a x, el símbolo cuya expresión se busca; hallamos

$$yz\,(y\bar{z} + cyz - c'\bar{z})\,x + (cyz + c'\bar{y})\,(c'\bar{y} - c'\bar{z})\,(1 - x) = 0;$$

ó

$$cyzx + (cyz + c'\bar{y})\ (c'\bar{y} - c'\bar{z})\ (1 - x) = 0;$$

de donde encontramos,

$$x = \frac{(cyz + c'\bar{y})\ (c'\bar{y} - c'\bar{z})}{(cyz + c'\bar{y})\ (c'\bar{y} - c'\bar{z}) - cyz};$$

y desarrollando el segundo miembro con respecto a y y z,

$$x = 0\ yz + \frac{0}{0}\ y\bar{z} + \frac{c'^2}{c'^2}\ \bar{y}z + \frac{0}{0}\ \bar{y}\bar{z};$$

ó

$$x = (1 - y)\ z + \frac{0}{0}\ y\ (1 - z) + \frac{0}{0}\ (1 - y)\ (1 - z);$$

ó

$$x = (1 - y)\ z + \frac{0}{0}\ (1 - z);$$

cuya interpretación es *dondequiera que se presente la propiedad A, o bien C está presente y B ausente, o C está ausente. E inversamente, dondequiera que la propiedad C se presente, y la propiedad B esté ausente, se presenta la propiedad A.*

Estos resultados pueden obtenerse mucho más fácilmente por el método que vamos a exponer a continuación. Es satisfactorio de todos modos poseer diferentes modos que sirvan para una verificación mutua para llegar a la misma conclusión.

4. Procedamos con el segundo método.

PROPOSICION II

Si cualesquiera ecuaciones $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, etc. son tales que los desarrollos de sus primeros miembros constan únicamente de constituyentes de coeficientes positivos, dichas ecuaciones pueden combinarse en una ecuación simple equivalente mediante la adición.

Porque como antes, hagamos que At represente cualquier término en el desarrollo de la función V_1, Bt el término correspondiente en el desarrollo de V_2, y así sucesivamente. Entonces el término correspondiente en el desarrollo de la ecuación

$$V_1 + V_2 + \&c. = 0, \qquad (1)$$

formado por la adición de las varias ecuaciones dadas será

$$(A + B + \&c.)\ t.$$

Pero como por hipótesis los coeficientes A, B, etc., no son ninguno de ellos negativos, el coeficiente agregado A + B etc., en la ecuación derivada será igual a 0 únicamente cuando ambos coeficientes A, B, etc., sean iguales a 0 a la vez. De aquí que los mismos constituyentes aparecerán tanto en el desarrollo de la ecuación (1) como en las varias ecuaciones $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, etc., del sistema original tomadas colectiva-

mente y así pues la interpretación de la ecuación (1) será equivalente a las interpretaciones conjuntas de las varias ecuaciones de las que se deriva.

PROPOSICION III

5. *Si* $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, *etc. representan cualquier sistema de ecuaciones cuyos términos se han llevado por transposición al primer lado, la interpretación combinada del sistema estará contenida en la ecuación simple*

$$V_1^2 + V_2^2 + \&c. = 0,$$

formada por la adición de los cuadrados de las ecuaciones dadas.

Pues produzca cualquier ecuación del sistema, como $V_1 = 0$, al ser desarrollada, una ecuación

$$a_1 t_1 + a_2 t_2 + \&c. = 0,$$

en la que t_1, t_2, etc. son constituyentes, y a_1, a_2, etc. sus correspondientes coeficientes. Entonces la ecuación $V_1^2 = 0$ producirá al ser desarrollada una ecuación

$$a_1^2 t_1 + a_2^2 t_2 + \&c. = 0,$$

como puede probarse bien por la ley del desarrollo o elevando al cuadrado la función $a_1 t_1 + a_2 t_2$, etc. sometida a las condiciones

$$t_1^2 = t_1, \quad t_2^2 = t_2, \quad t_1 t_2 = 0,$$

asignadas en la Prop. 3, Cap. V. De aquí que los constituyentes que aparecen en la expansión de la ecuación $V_1^2 = 0$, son los mismos que aquellos que aparecen en la expansión de la ecuacion $V_1 = 0$, y tienen coeficientes positivos. Y la misma observación se aplica a las ecuaciones $V_2 = 0$, etc. De aquí que por la última Proposición, la ecuación

$$V_1^2 + V_2^2 + \&c. = 0$$

será equivalente en interpretación al sistema de ecuaciones

$$V_1 = 0, \quad V_2 = 0, \ \&c.$$

Corolario.— Cualquier ecuación, V = 0, cuyo primer miembro, satisfaga ya la condición

$$V^2 = V, \text{ o } V(1 - V) = 0,$$

no necesita el proceso de elevación al cuadrado (puesto que permanece inafectado por él). Tales ecuaciones son ciertamente desarrollables inmediatamente en una serie de constituyentes, con coeficientes iguales a 1, Cap. V, Prop. 4.

PROPOSICION IV

6. *Siempre que las ecuaciones de un sistema hayan sido reducidas al anterior proceso de elevación al cuadrado, o por otro proceso, a una forma tal que todos los constituyentes que aparezcan en su desarrollo tengan coeficientes positivos, cualesquiera ecuaciones derivadas que se obtengan por eliminación poseerán el mismo carácter, y pueden combinarse con las otras ecuaciones mediante la adición.*

Supongamos que tenemos que eliminar un símbolo x de una ecuación $V = 0$, tal que ninguno de los constituyentes en el desarrollo completo de su primer miembro, tenga coeficientes negativos. Esa expansión se puede escribir en la forma

$$V_1 x + V_0 (1 - x) = 0,$$

siendo V_1 y V_0 de la forma

$$a_1 t_1 + a_2 t_2 \ldots + a_n t_n,$$

en la cual $t_1 t_2 \ldots t_n$ son constituyentes de los otros símbolos, y $a_1 a_2 \ldots a_n$ en cada caso cantidades positivas o iguales a 0. El resultado de la eliminación es

$$V_1 V_2 = 0;$$

y como los coeficientes de V_1 y V_2 no son ninguno de ellos negativo, no puede haber coeficientes negativos en el producto $V_1 V_2$. De aquí que la ecuación $V_1 V_2 = 0$ se pueda sumar a cualquier otra ecuación los coeficientes de cuyos constituyentes sean positivos, y la ecuación resultante combinará el significado completo de aquellas a partir de las cuales se obtuvo.

PROPOSICION V

7. *Para deducir de las proposiciones previas una regla práctica o métodos para la reducción de sistemas de ecuaciones que expresen proposiciones en Lógica.*

Mediante las investigaciones previas hemos establecido los siguientes puntos: a saber

PRIMERO.— Que cualesquiera ecuaciones que sean de la forma $V = 0$, satisfaciendo V la ley fundamental de la dualidad $V(1 - V) = 0$, pueden combinarse por simple adición.

SEGUNDO.— Que cualquier otra ecuación de la forma $V = 0$ puede reducirse, por el proceso de elevación al cuadrado, a una forma en la cual es aplicable el mismo principio de combinación por mera adición.

Resta simplemente determinar qué ecuaciones en la expresión de hecho de proposiciones pertenecen a la primera clase y cuáles a la última.

Ahora bien, los tipos generales de proposiciones se han establecido en la conclusión del Cap. IV. La división de proposiciones que presenta es como sigue:

PRIMERO.– Proposiciones cuyo sujeto es universal y el predicado particular. El tipo simbólico (IV. 15) es

$$X = v\,Y,$$

satisfaciendo X e Y la ley de la dualidad. Eliminando v tenemos

$$X\,(1 - Y) = 0, \qquad (1)$$

que satisfará la misma ley. No es necesaria ninguna reducción posterior en el proceso de elevación al cuadrado.

SEGUNDO.– Proposiciones cuyos dos términos son universales, y cuyo tipo simbólico es

$$X = Y,$$

satisfaciendo X e Y separadamente la ley de la dualidad. Escribiendo la ecuación en la forma $X - Y = 0$, y elevando al cuadrado, tenemos

$$X - 2XY + Y = 0,$$

ó

$$X\,(1 - Y) + Y\,(1 - X) = 0. \qquad (2)$$

El primer miembro de esta ecuación satisface la ley de la dualidad, como es evidente por su misma forma.

Podemos llegar a la misma ecuación de un modo distinto. La ecuación

$$X = Y$$

es equivalente a las dos ecuaciones

$$X = v\,Y, \quad Y = v\,X,$$

(porque afirmar que los X son idénticos a Y es afirmar tanto que todos los X son Y cuanto que todos los Y son X). Ahora bien esas ecuaciones dan, por eliminación de v

$$X\,(1 - Y) = 0, \quad Y\,(1 - X) = 0,$$

que sumados producen (2).

TERCERO.– Proposiciones cuyos dos términos son particulares. La forma de tales proposiciones es

$$v\,X = v\,Y,$$

pero v no es enteramente arbitrario, y por esto no debe ser eliminado. Porque v es el representante de algunos, que, aunque pueda incluir en su significado todos, no

incluye ninguno. Debemos, por tanto, transponer el segundo miembro al primer lado, y elevar al cuadrado la ecuación resultante de acuerdo con la regla.

El resultado será obviamente

$$vX(1 - Y) + vY(1 - X) = 0.$$

Será conveniente incorporar las anteriores conclusiones a una regla, que será útil en vistas a una futura dirección constante.

8. REGLA.– *Las ecuaciones expresadas en manera tal que los términos X e Y en las siguientes formas típicas obedecen la ley de la dualidad, cambian las ecuaciones*

$$\begin{aligned} X &= vY \text{ en } X(1 - Y) = 0, \\ X &= Y \text{ en } X(1 - Y) + Y(1 - X) = 0. \\ vX &= vY \text{ en } vX(1 - Y) + vY(1 - X) = 0. \end{aligned}$$

Cualquier ecuación que se dé en la forma X = 0 no necesitará transformación, y cualquier ecuación que se presente en la forma X = 1 puede reemplazarse por 1 – X = 0, como es manifiesto a partir de la segunda de las anteriores transformaciones.

Cuando las ecuaciones del sistema han sido reducidas de este modo, cualquiera de ellas, así como cualesquiera ecuaciones derivadas de ellas por el proceso de eliminación, puede combinarse mediante adición.

9. NOTA.– Se ha visto en el capítulo IV que traduciendo literalmente los términos de una proposición, sin atender a su significado real, al lenguaje de los símbolos, podemos producir ecuaciones en las cuales los términos X e Y no obedezcan la ley de la dualidad. La ecuación $w = st\ (p + r)$, dada en (3) Prop. 3 del capítulo a que nos referimos, es de esta clase. Tales ecuaciones sin embargo, como se ha visto, poseen un significado. Si determináramos emplearlas, sea por curiosidad o por cualquier otro motivo, sería mejor reducirlas por la regla (VI.5).

10. Ejemplo 2.– Tomemos las siguientes Proposiciones de Geometría elemental:

PRIMERO.– Las figuras similares consisten en todas aquellas cuyos ángulos correspondientes son iguales, y cuyos lados correspondientes son proporcionales.

SEGUNDO.– Los triángulos cuyos ángulos correspondientes son iguales tienen sus lados correspondientes proporcionales, y *viceversa*.

Para representar estas premisas hagamos

s = similares
t = triángulos
q = que tienen sus ángulos correspondientes iguales
r = que tienen sus lados correspondientes proporcionales.

Así las premisas se expresan por las siguientes ecuaciones:

$$s = qr, \tag{1}$$

$$tq = tr. \tag{2}$$

Reduciendo por la Regla, o, lo que es equivalente, llevando los términos de estas ecuaciones al primer lado, elevando al cuadrado cada ecuación, y sumando, tenemos

$$s + qr - 2qrs + tq + tr - 2tqr = 0. \tag{3}$$

Pídase deducir una descripción de las figuras no similares formadas a partir de los elementos expresados por los términos, *triángulos*, que tienen los ángulos correspondientes iguales, y los lados correspondientes proporcionales.

Tenemos a partir de (3)

$$s = \frac{tq + qr + rt - 2tqr}{2qr - 1},$$

$$\therefore 1 - s = \frac{qr - tq - rt + 2tqr - 1}{2qr - 1}. \tag{4}$$

Y desarrollando totalmente el segundo miembro, hallamos

$$\begin{aligned} 1 - s = {} & 0tqr + 2tq(1-r) + 2tr(1-q) + t(1-q)(1-r) \\ & + 0(1-t)qr + (1-t)q(1-r) + (1-t)r(1-q) \\ & + (1-t)(1-q)(1-r). \end{aligned} \tag{5}$$

En el desarrollo anterior dos de los términos tienen el coeficiente 2, estos deben igualarse a 0 por la Regla, y así siendo rechazados aquellos términos cuyos coeficientes son 0, tenemos

$$\begin{aligned} 1 - s = {} & t(1-q)(1-r) + (1-t)q(1-r) + (1-t)r(1-q) \\ & + (1-t)(1-q)(1-r); \end{aligned} \tag{6}$$

$$tq(1-r) = 0; \tag{7}$$

$$tr(1-q) = 0; \tag{8}$$

cuya interpretación directa es

PRIMERO.— *Las figuras no similares consisten en todos los triángulos que no tienen iguales sus ángulos correspondientes ni sus lados proporcionales, y en todas las figuras que no sean triángulos que tengan o sus ángulos iguales y sus lados no proporcionales, o sus lados correspondientes proporcionales y ángulos no iguales, o bien ni sus ángulos correspondientes iguales ni sus lados correspondientes proporcionales.*

SEGUNDO.— *No existen triángulos cuyos ángulos correspondientes sean iguales y sus lados no proporcionales.*

TERCERO.– *No existen triángulos cuyos lados correspondientes sean proporcionales y sus ángulos no iguales.*

11. Tales son las interpretaciones inmediatas de la ecuación final. Se ve, de acuerdo con la teoría general que al deducir una descripción de una clase particular de objetos, a saber, figuras no similares, en términos de ciertos otros elementos distintos de las premisas originales, obtenemos también las relaciones independientes que existen entre aquellos elementos en virtud de las mismas premisas. Y que esto no es información superflua, incluso en lo que respecta al objeto inmediato de investigación, se puede mostrar fácilmente.

Por ejemplo, las relaciones independientes se pueden utilizar siempre para reducir, si se considera deseable, a una forma más breve la expresión de aquella relación que se busca directamente. Así si escribimos (7) en la forma

$$0 = tq\,(1 - r),$$

y la sumamos a (6), obtenemos, puesto que

$$t\,(1 - q)\,(1 - r) + tq\,(1 - r) = t\,(1 - r),$$

$$1 - s = t(1 - r) + (1 - t)\,q\,(1 - r) + (1 - t)\,r\,(1 - q) + (1 - t)\,(1 - q)\,(1 - r),$$

la cual, al interpretarla, nos daría para el primer término de la descripción de figuras no similares, "Triángulos cuyos lados correspondientes no son proporcionales", en lugar de la más completa descripción obtenida originalmente. Una mirada sobre la conveniencia debe siempre determinar la corrección de tal reducción.

12. Una reducción que es siempre ventajosa (VII,15) consiste en reunir los términos de la inmediata descripción buscada como en el segundo miembro de (5) o (6), en tan pocos grupos como sea posible. Así el tercero y cuarto términos del segundo miembro de (6) producen por adición el término único (1–t) (1–q). Si esta reducción se combina con la última, tenemos

$$1 - s = t\,(1 - r) + (1 - t)\,q\,(1 - r) + (1 - t)\,(1 - q),$$

cuya interpretación es

Las figuras no similares consisten en todos los triángulos cuyos lados correspondientes no son proporcionales, y todas las figuras que no sean triángulos que tengan o bien sus ángulos correspondientes desiguales, o sus ángulos correspondientes iguales, pero los lados no proporcionales.

Lo completo de la solución general no es por lo tanto una superfluidad. A la vez que nos da toda la información que buscamos, nos provee también de los medios de expresar esta información del modo más ventajoso.

13. Nos resta por hacer otra observación, ilustrativa de un principio que se ha establecido ya. Dos de los términos del desarrollo completo de 1 – s en (5) tienen 2 por coeficiente, en lugar de $\frac{1}{0}$. Se mostrará después que esta circunstancia indica

que las dos premisas no eran independientes. Para verificar esto, resumamos las ecuaciones de las premisas en sus formas reducidas, a saber,

$$s(1 - qr) + qr(1 - s) = 0,$$

$$tq(1 - r) + tr(1 - q) = 0.$$

Ahora bien, si los primeros miembros de esas ecuaciones tienen algún constituyente común, se pondrá de manifiesto al multiplicar las ecuaciones. Si hacemos esto obtenemos

$$stq(1 - r) + str(1 - q) = 0.$$

De donde resultará

$$stq(1 - r) = 0, \quad str(1 - q) = 0,$$

siendo ecuaciones que son deducibles de una de las primitivas. Sus interpretaciones son —

Triángulos similares que tienen sus ángulos correspondientes iguales tienen sus lados correspondientes proporcionales.

Triángulos similares que tienen sus lados correspondientes proporcionales tienen sus ángulos correspondientes iguales.

Y estas conclusiones son deducibles igualmente de cada premisa *por separado*. A este respecto de acuerdo con las definiciones que subyacen, las premisas no son independientes.

14. Resumamos, para concluir, el problema discutido como ilustración del primer método de este capítulo, y esforcémonos por averiguar, mediante el presente método, qué se puede concluir a partir de la presencia de la propiedad C, con referencia a las propiedades A y B.

Hallamos, al eliminar los símbolos v las siguientes ecuaciones, a saber:

$$xy(wz + \bar{w}\bar{z}) = 0, \tag{1}$$

$$yz(x\bar{w} + \bar{x}w) = 0, \tag{2}$$

$$\bar{x}\bar{y} = \bar{w}\bar{z}. \tag{3}$$

A partir de ellas vamos a eliminar w y determinar z. Ahora bien (1) y (2) satisfacen ya la condición V(1—V) = 0. La tercera ecuación da, al llevar los términos al primer lado, y elevar al cuadrado

$$\bar{x}\bar{y}(1 - \bar{w}\bar{z}) + \bar{w}\bar{z}(1 - \bar{x}\bar{y}) = 0. \tag{4}$$

Sumando (1), (2) y (4), tenemos

$$xy(wz + \bar{w}\bar{z}) + yz(x\bar{w} + \bar{x}w) + \bar{x}\bar{y}(1 - \bar{w}\bar{z}) + \bar{w}\bar{z}(1 - \bar{x}\bar{y}) = 0.$$

Eliminando w, obtenemos

$$(xyz + yz\bar{x} + \bar{x}\bar{y})\{xy\bar{z} + yzx + \bar{x}\bar{y}z + \bar{z}(1 - \bar{x}\bar{y})\} = 0.$$

Ahora bien, al multiplicar los términos del segundo factor por los del primero sucesivamente, observando que

$$x\bar{x} = 0, \quad y\bar{y} = 0, \quad z\bar{z} = 0,$$

casi todos desaparecen, y nos resta solamente

$$xyz + \bar{x}\bar{y}z = 0\,; \tag{5}$$

de donde

$$z = \frac{0}{xy + \bar{x}\bar{y}}$$

$$= 0xy + \frac{0}{0}\,x\bar{y} + \frac{0}{0}\,\bar{x}y + 0\bar{x}\bar{y}$$

$$= \frac{0}{0}\,x\bar{y} + \frac{0}{0}\,\bar{x}y,$$

que nos proporciona la interpretación. *Siempre que se halle la propiedad C, se hallarán junto a ella la propiedad A o la propiedad B, pero no las dos juntas.*

A partir de la ecuación (5) podemos deducir fácilmente el resultado a que se llega en la investigación previa por el método de los multiplicadores constantes arbitrarios, así como cualquier otras formas propuestas de la relación entre *x*, *y* y *z*, por ejemplo. *Si falta la propiedad B, se presentarán conjuntamente A y C, o C estará ausente.* Y, por el contrario, *Si se presentan conjuntamente A y C, B estará ausente.* La parte inversa de esta conclusión se funda en la presencia de un término *xz* con la unidad por coeficiente en el valor desarrollado de $\bar{y}$.

CAPITULO IX

SOBRE CIERTOS METODOS DE ABREVIACION

1. Aunque los tres métodos fundamentales de desarrollo, eliminación y reducción establecidos e ilustrados en los capítulos previos son suficientes para todos los fines prácticos de la Lógica, existen sin embargo ciertos casos que admiten, y especialmente el método de eliminación, simplificarse en un grado importante; y a ellos quiero dirigir la atención en el presente capítulo. Demostraré primero algunas proposiciones en las que se contienen los principales de los anteriores métodos de abreviación, y los aplicaré a continuación a ejemplos particulares.

Designemos como términos de clase cualesquiera términos que satisfagan la ley fundamental $V(1-V) = 0$. Tales términos serán constituyentes individualmente; pero cuando se presenten juntos no contendrán necesariamente, como lo hacen los términos de un desarrollo, los mismos símbolos en cada uno. Así $ax + bxy + cyz$ puede describirse como una expresión que consta de tres clases de términos, x, xy e yz, multiplicados por los coeficientes a, b, c respectivamente. El principio aplicado en las dos siguientes Proposiciones, y que, en algunos casos, abrevia en gran manera el proceso de eliminación, es el de *rechazo de los términos de clase superfluos*; considerando como supérfluos aquellos que no añaden a los constituyentes del resultado final.

PROPOSICION I

2. *A partir de cualquier ecuación $V = 0$ en la que V consta de una serie de términos de clase que tienen coeficientes positivos, nos está permitido rechazar cualquier término que contenga otro término como factor, y cambiar cada coeficiente positivo por la unidad.*

Pues la significación de esta serie de términos positivos depende únicamente del número y naturaleza de los constituyentes de su expansión final, es decir, de su expansión con referencia a todos los símbolos que comprende, y en absoluto de los valores actuales de los coeficientes (VI.5). Ahora bien, sea x cualquier término de la serie, y xy cualquier otro término que contenga a x como factor. La expansión de x con referencia a los símbolos x e y será

$$xy + x\,(1 - y),$$

y la expansión de la suma de los términos x y xy

$$2xy + x\ (1 - y).$$

Pero por lo que se ha dicho, estas expresiones que ocurren en el primer miembro de una ecuación, cuyo segundo miembro es 0, y en que todos los coeficientes del primer miembro son positivos, son equivalentes; ya que en la expansión final deben existir simplemente los dos constituyentes xy y x(1—y), de donde surgirán de modo sencillo las ecuaciones resultantes

$$xy = 0, \quad x\ (1 - y) = 0.$$

y por tanto, el agregado de términos x + xy puede reemplazarse por el término único x.

El mismo razonamiento se aplica a todos los casos que se contemplan en la Proposición. Así, si el término x se repite, el agregado $2x$ puede reemplazarse por x, porque bajo las circunstancias la ecuación x = 0 debe aparecer en la reducción final.

PROPOSICION II

3. *Allí donde en el proceso de eliminación tengamos que multiplicar dos factores, que consten cada uno únicamente de términos positivos que satisfagan la ley fundamental de los símbolos lógicos, se puede rechazar de ambos factores cualquier término común, o de cada factor cualquier término que sea divisible por un término en el otro factor; a condición de que siempre el término rechazado se sume al producto de los factores resultantes.*

En la enunciación de esta Proposición, la palabra "divisible" es un término de conveniencia, usado en el sentido algebraico, en el cual xy y x(1—y) se dice que son divisibles por x.

Para hacer más claro el contenido de esta Proposición, supongamos que los factores a multiplicar son x + y + z y x + yw + t. Afirmamos, pues, que podemos rechazar de estos dos factores el término x, y que del segundo factor podemos rechazar el término yw, a condición de que estos términos se transfieran al producto final. Así, siendo los factores resultantes $y + z$ y t, si a su producto yt + tz añadimos los términos x e yw tenemos

$$x + yw + yt + zt,$$

como expresión equivalente al producto de los factores dados x + y + z y x + yw + t; es decir, equivalente en el proceso de eliminación.

Consideremos en primer lugar el caso en el que los dos factores tengan un término común x, y representemos los factores por las expresiones x + P, x + Q, suponiendo que P en un caso y Q en el otro sean la suma de los términos positivos adicionales a x.

Ahora bien,

$$(x + P)\ (x + Q) = x + xP + xQ + PQ. \qquad (1)$$

Pero el proceso de eliminación consiste en multiplicar ciertos factores, e igualar el resultado a 0. O bien, pues, el segundo miembro de la anterior ecuación es igual a 0, o bien es un factor de alguna expresión que hay que igualar a 0.

Si tomamos la primera alternativa, entonces, por la última Proposición nos está permitido rechazar los términos xP y xQ, en tanto que son términos positivos que tienen otro término x como factor.

La expresión resultante es

$$x + PQ,$$

que es la que obtendríamos rechazando x de ambos factores, y sumándolo al producto de los factores que permanecen.

Tomando la segunda alternativa, el único modo en el que el segundo miembro de (1) puede afectar al resultado final de la eliminación debe depender del número y naturaleza de sus constituyentes, cuyos elementos no están afectados por el rechazo de los términos xP y xQ. Porque este desarrollo de x incluye todos los posibles constituyentes de los que x es un factor.

Consideremos finalmente el caso en el cual uno de los factores contiene un término, como xy, divisible por un término x, en el otro factor.

Sean los factores x + P y xy + Q. Ahora bien

$$(x + P)(xy + Q) = xy + xQ + xyP + PQ.$$

Pero por el razonamiento de la última Proposición, el término xyP puede rechazarse puesto que contiene otro término positivo xy como factor, de donde tenemos

$$xy + xQ + PQ$$
$$= xy + (x + P)\,Q.$$

Pero esto expresa el rechazo del término xy del segundo factor, y su transferencia al producto final. Por tanto la Proposición es obvia.

PROPOSICION III

4. *Si t es un símbolo que se mantiene en el resultado final de la eliminación de cualesquiera otros símbolos a partir de un sistema de ecuaciones, el resultado de tal eliminación puede expresarse en la forma*

$$Et + E'(1 - t) = 0,$$

en la cual E se forma haciendo t = 1 en el sistema propuesto, y eliminando los otros símbolos iguales; y E' haciendo en el sistema propuesto t = 0, y eliminando los otros símbolos iguales.

Represente $\phi(t) = 0$ el resultado final de la eliminación. Expandiendo esta ecuación, tenemos,

$$\phi(1)\,t + \phi(0)\,(1 - t) = 0.$$

Ahora bien, por cualquier proceso por el que deduzcamos la función $\phi(t)$ a partir del sistema propuesto de ecuaciones, por el mismo proceso deduciríamos $\phi(1)$, si en aquellas ecuaciones t se sustituyera por 1; y por el mismo proceso deduciríamos $\phi(0)$, si en las mismas ecuaciones t se sustituyera por 0. Por lo tanto se manifiesta la verdad de la proposición.

5. De las tres proposiciones probadas últimamente, puede señalarse que, aunque más bien no esenciales para el estricto desarrollo o aplicación de la teoría general, cumplen sin embargo fines importantes de naturaleza práctica. Por la Proposición I podemos simplificar los resultados de la suma; por la Proposición II podemos simplificar los de la multiplicación; y por la Proposición III podemos dividir cualquier proceso tedioso de eliminación en dos procesos distintos, que serán en general de un carácter mucho menos complejo. Este método se adoptará frecuentemente, cuando el objeto final de la investigación sea la determinación del valor de t, en términos de los otros símbolos que permanezcan después de efectuada la eliminación.

6. Ejemplo 1.– Habiendo determinado Aristóteles, en la Etica a Nicómaco, Libro II, capítulo 3 que las acciones son virtuosas, no por poseer en si mismas cierto carácter, sino por implicar cierta condición de espíritu en el que las ejecuta, a saber que las ejecuta con conocimiento de causa, y con deliberada preferencia, por el bien propio que poseen, y bajo principios de conducta fijos, procede en los dos capítulos siguientes a considerar la cuestión de si la virtud debe referirse al género de las Pasiones, o Facultades, o Hábitos, junto con otros puntos relacionados. Basa su investigación sobre las siguientes premisas, a partir de las cuales deduce también la doctrina general y la definición de la virtud moral, de la que el resto del tratado constituye una exposición.

PREMISAS

PRIMERO.– La virtud es o bien una pasión (πάθος), o una facultad (δύναμις) o un hábito (ἕξις).

SEGUNDO.– Las pasiones no son cosas de acuerdo con las cuales somos alabados o condenados o en las cuales ejercitamos una deliberada preferencia.

TERCERO.– Las facultades no son cosas de acuerdo con las que somos alabados o condenados, y que están acompañadas por una preferencia deliberada.

CUARTO.– La virtud es algo de acuerdo con lo cual se nos alaba o se nos condena, y que se acompaña de una deliberada preferencia.

QUINTO.– Cualquier arte o ciencia que haga que su obra sea buena evita los extremos y observa el término medio en referencia a la naturaleza humana. (τὸ μέσον . . . πρὸς ἡμᾶς).

SEXTO.– La virtud es más exacta y excelente que cualquier arte o ciencia.

Este es un argumento *a fortiori.* Si la ciencia y el verdadero arte evitan igual-

mente defecto y extravagancia, la virtud sigue mucho más la línea que no se desvía de la moderación. Si hacen que su obra sea buena, tenemos mucha más razón para decir que la virtud hace que su obra propia sea buena. Interpretemos así la premisa final. Omitamos toda referencia a alabanza o culpa, puesto que la mención de estas en las premisas acompaña sólo la mención de deliberada preferencia, y este es un elemento que nós proponemos retener. Podemos asumir así como nuestros símbolos representativos.

v = virtud.
p = pasiones.
f = facultades.
h = hábitos.
d = cosas a las que acompaña una deliberada preferencia.
g = cosas que hacen que su obra sea buena.

m = cosas que observan el término medio en referencia a la naturaleza humana.

Utilizando, pues, q como un símbolo de clase indefinida, nuestras premisas se expresarán por las siguientes ecuaciones:

$$v = q\{p(1-f)(1-h) + f(1-p)(1-h) + h(1-p)(1-f)\}.$$
$$p = q(1-d).$$
$$f = q(1-d).$$
$$v = qd.$$
$$g = qm.$$
$$v = qg.$$

Y eliminando separadamente a partir de ellas los símbolos q,

$$v\{1 - p(1-f)(1-h) - f(1-p)(1-h) - h(1-p)(1-f) = 0. \quad (1)$$
$$pd = 0. \quad (2)$$
$$fd = 0. \quad (3)$$
$$v(1-d) = 0. \quad (4)$$
$$g(1-m) = 0. \quad (5)$$
$$v(1-g) = 0. \quad (6)$$

Eliminaremos en primer lugar de (2), (3) y (4) el símbolo d y a continuación determinaremos v en relación con p, f y h. Ahora bien, la adición de (2), (3) y (4) da

$$(p+f)d + v(1-d) = 0.$$

A partir de la cual, eliminando d por el método ordinario, hallamos

$$(p+f)v = 0. \qquad (7)$$

Sumando esto a (1), y determinando v, hallamos

$$v = \frac{0}{p+f+1-p(1-f)(1-h)-f(1-p)(1-h)-h(1-f)(1-p)}.$$

De donde por desarrollo

$$v = \frac{0}{0} h(1-f)(1-p).$$

La interpretación de esta ecuación es: *La virtud es un hábito, y no una facultad o una pasión.*

A continuación, eliminaremos f, p y g del sistema original de ecuaciones, y así determinamos v en relación con h, d y m. Eliminaremos en este caso p y f juntas. Al sumar (1), (2) y (3) obtenemos

$$v\{1-p(1-f)(1-h)-f(1-p)(1-h)-h(1-p)(1-f)\} + pd+fd = 0.$$

Desarrollando ésta con referencia a p y f, tenemos

$$(v+2d)pf+(vh+d)p(1-f)+(vh+d)(1-p)f + v(1-h)(1-p)(1-f) = 0.$$

De donde el resultado de la eliminación será

$$(v+2d)(vh+d)(vh+d)v(1-h) = 0.$$

Ahora bien $v + 2d = v + d + d$, que por la Prop. I es reducible a $v + d$. El producto de esto y el segundo factor es

$$(v+d)(vh+d),$$

que por la Prop. II se reduce a

$$d + v(vh) \text{ o } vh + d.$$

De igual modo, este resultado, multiplicado por el tercer factor, da simplemente vh+d. Finalmente, multiplicando esto por el cuarto factor v(1 − h), da como ecuación final

$$vd(1-h) = 0. \qquad (8)$$

Resta eliminar g de (5) y (6). El resultado es

$$v\,(1 - m) = 0. \qquad (9)$$

Finalmente, las ecuaciones (4), (8) y (9) dan al sumar

$$v\,(1 - d) + vd\,(1 - h) + v\,(1 - m) = 0,$$

de donde tenemos

$$v = \frac{0}{1 - d + d\,(1 - h) + 1 - m}.$$

Y el desarrollo de este resultado da

$$v = \frac{0}{0}\,hdm,$$

cuya interpretación es, — *La virtud es un hábito acompañado de una deliberada preferencia y que observa el término medio relativo a la naturaleza humana.*

Hablando con propiedad, esto no es una definición, sino una descripción de la virtud. Es *todo*, sin embargo, lo que puede inferirse correctamente a partir de las premisas. Aristóteles conecta especialmente con ello la necesidad de la prudencia para determinar la línea de acción buena y media; y no hay duda de que las antiguas teorías de la virtud compartían más de un carácter intelectual que aquellas (exceptuando la teoría de la utilidad) que han prevalecido más en nuestros días. La virtud se consideraba que consistía en el estado y hábito adecuado de toda la mente *en su totalidad*, más bien que en la simple supremacía de la conciencia o de la facultad moral. Y en algunos puntos aquellas teorías eran indudablemente verdaderas. Porque aunque la obediencia no cualificada a los dictados de la conciencia es un elemento esencial de la conducta virtuosa, sin embargo, la conformidad de aquellos dictados con aquellos principios inalterables de la rectitud (αἰώνια δίκαια) en los que se fundan, o más bien que son ellos mismos el fundamento de la constitución de las cosas, es otro elemento, Y generalmente esta conformidad, al menos en un alto grado, es incompatible con un estado de ignorancia y estupidez mental. Volviendo a la particular teoría de Aristóteles, probablemente parecerá a los más que es de un carácter demasiado negativo, y que el rehuir los extremos no proporciona un ámbito suficiente para el consumo de las más nobles energías de nuestro ser. Aristóteles parece no haber sido perfectamente consciente de este defecto de su sistema cuando en el comienzo de su séptimo libro habla de una "virtud heróica" (7) que se levanta por encima de la medida de la naturaleza humana.

7. Ya he hecho notar (VIII.1) que la teoría de las ecuaciones simples o proposiciones comprende cuestiones que no pueden contestarse enteramente, excepto en conexión con la teoría de los sistemas de ecuaciones. Esta observación se ejemplifi-

ca cuando nos proponemos determinar a partir de una ecuación simple la relación, no de cualquier clase elemental simple, sino de alguna clase compuesta, que contenga en su expresión más de un elemento, en términos de los elementos que permanecen. El siguiente ejemplo particular y los problemas generales siguientes son de esta naturaleza.

Ejemplo 2.– Resumamos la expresión simbólica de la definición de riqueza empleada en el Capítulo VII., a saber

$$w = st\,\{p + r\,(1 - p)\},$$

donde, como anteriormente

w = riqueza

s = cosas limitadas en cuanto a la oferta

t = cosas transferibles

p = cosas productoras de placer

r = cosas preventivas del dolor

y supongamos que debemos determinar de aquí la relación entre cosas transferibles y productoras de placer con los otros elementos de la definición, a saber, riqueza, cosas limitadas en cuanto a la oferta y cosas preventivas del dolor.

La expresión para cosas transferibles y productoras de placer es tp. Representemos esto por un nuevo símbolo y. Tenemos así las ecuaciones

$$w = st\,\{p + r\,(1 - p)\},$$
$$y = tp,$$

de las cuales, si eliminamos t y p podemos determinar y como una función de w, s y r. El resultado interpretado dará la relación buscada. Llevando los términos de esas ecuaciones al primer lado, tenemos,

$$\begin{aligned} w - stp - str\,(1 - p) &= 0. \\ y - tp &= 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

Y sumando los cuadrados de esas ecuaciones,

$$w + stp + str\,(1 - p) - 2wstp - 2wstr\,(1 - p) + y + tp - 2ytp = 0. \quad (4)$$

Desarrollando el primer miembro respecto a t y p, para eliminar aquellos símbolos, tenemos

$$\begin{aligned} &(w + s - 2ws + 1 - y)\,tp + (w + sr - 2wsr + y)\,t\,(1 - p) \\ &\quad + (w + y)\,(1 - t)\,p + (w + y)\,(1 - t)\,(1 - p); \end{aligned} \qquad (5)$$

y el resultado de la eliminación de t y p se obtendrá igualando a 0 el producto de los cuatro coeficientes de

$$tp,\ t(1-p),\ (1-t)\,p,\ \text{y}\quad (1-t)\,(1-p).$$

0, por la Proposición III, el resultado de la eliminación de t y p a partir de la anterior ecuación será de la forma

$$Ey + E'(1-y),$$

donde E es el resultado obtenido sustituyendo en la ecuación dada y por 1, y eliminando así t y p; y E' el resultado obtenido sustituyendo en la misma ecuación y por 0, y eliminando a continuación t y p. Y la forma en cada caso de eliminar t y p es multiplicar los coeficientes de los cuatro constituyentes tp, $t(1-p)$, etc.

Si hacemos $y = 1$ los coeficientes se convierten

PRIMERO.— $w(1-s) + s(1-w)$.

SEGUNDO.—$1 + w(1-sr) + s(1-w)\,r$, equivalente a 1 por la Proposición I

TERCERO Y CUARTO.— $1 + w$, equivalente a 1 por la Proposición I

De aquí el valor de E será

$$w(1-s) + s(1-w).$$

Además, haciendo en (5) y = 0, tenemos para los coeficientes

PRIMERO.— $1 + w(1-s) + s(1-w)$, equivalente a 1

SEGUNDO.— $w(1-sr) + sr(1-w)$.

TERCERO Y CUARTO.— w.

El producto de esos coeficientes da

$$E' = w(1-sr).$$

La ecuación a partir de la cual debe determinarse y, es por tanto

$$\{w(1-s) + s(1-w)\}\,y + w(1-sr)\,(1-y) = 0,$$

$$\therefore\ y = \frac{w(1-sr)}{w(1-sr) - w(1-s) - s(1-w)};$$

y desarrollando el segundo miembro

$$y = \frac{0}{0}\,wsr + ws(1-r) + \frac{1}{0}\,w(1-s)\,r + \frac{1}{0}\,w(1-s)(1-r)$$
$$+ 0\,(1-w)\,sr + 0\,(1-w)\,s(1-r) + \frac{0}{0}(1-w)\,(1-s)\,r$$
$$+ \frac{0}{0}(1-w)\,(1-s)\,(1-r);$$

de donde reduciendo

$$y = ws\,(1 - r) + \frac{0}{0}\,wsr + \frac{0}{0}\,(1 - w)\,(1 - s), \qquad (6)$$

con

$$w\,(1 - s) = 0. \qquad (7)$$

cuya interpretación es:

PRIMERO.– *Las cosas transferibles y productoras de placer consisten en toda riqueza (limitada en cuanto a la oferta y) no preventiva del dolor, una cantidad indefinida de riqueza (limitada en cuanto a la oferta y) preventiva del dolor, y una cantidad indeterminada de lo que no es riqueza y no está limitado en cuanto a la oferta.*

SEGUNDO.– *Toda riqueza está limitada en cuanto a la oferta.*

En la anterior solución he escrito entre paréntesis aquella parte de la descripción completa que está implicada por la relación independiente acompañante (7).

8. El problema siguiente es de una naturaleza más general, y nos suministrará una sencilla regla práctica para problemas tales como el último.

PROBLEMA GENERAL

Dada cualquier ecuación que conecte los símbolos x, y..w, z...

Pídese determinar la expresión lógica de cualquier clase expresada de cualquier modo por los símbolos x, y ... en términos de los símbolos restantes w, z etc.

Limitémonos al caso en el que no hay más que dos símbolos x, y, y dos símbolos w, z, un caso suficiente para determinar la Regla general.

Sea $V = 0$ la ecuación dada, y represente $\phi\,(x, y)$ la clase cuya expresión ha de determinarse.

Asumamos que $t = \phi\,(x, y)$, entonces x e y se eliminarán de las dos ecuaciones anteriores.

Ahora bien, la ecuación $V = 0$ puede desarrollarse en la forma

$$Axy + Bx\,(1 - y) + C(1 - x)\,y + D\,(1 - x)\,(1 - y) = 0, \quad (1)$$

Siendo A, B, C y D funciones de los símbolos w y z.

Además, como $\phi\,(x, y)$ representa una clase o colección de cosas, debe estar compuesto por un constituyente o series de constituyentes cuyos coeficientes son 1.

Por tanto si el desarrollo *completo de* $\phi(x, y)$ se representase en la forma

$$axy + bx(1 - y) + c(1 - x)y + d(1 - x)(1 - y),$$

los coeficientes a, b, c, d deben ser cada uno 1 ó 0.

Ahora bien, reduciendo la ecuación $t = \phi(x, y)$ por transposición y elevando al cuadrado a la forma

$$t\{1 - \phi(x, y)\} + \phi(x, y)(1 - t) = 0;$$

y desarrollando con referencia a x e y, obtenemos

$$\begin{aligned}\{t(1-a) + a(1-t)\}xy + \{t(1-b) + b(1-t)\}x(1-y)\\ + \{t(1-c) + c(1-t)\}(1-x)y\\ + \{t(1-d) + d(1-t)\}(1-x)(1-y) = 0;\end{aligned}$$

de donde, sumando esto a (1) tenemos

$$\begin{aligned}\{A + t(1-a) + a(1-t)\}xy\\ + \{B + t(1-b) + b(1-t)\}x(1-y) + \&c. = 0.\end{aligned}$$

Sea el resultado de la eliminación de x e y de la forma

$$Et + E'(1 - t) = 0,$$

entonces E, por lo que se ha dicho, será el producto reducido en que se convierten los coeficientes de la anterior expansión cuando $t = 1$, y E' el producto de los mismos factores reducidos de manera similar bajo la condición de $t = 0$.

De aquí que E será el producto reducido

$$(A + 1 - a)(B + 1 - b)(C + 1 - c)(D + 1 - d).$$

Considerando cualquier factor de esta expresión, como $A + 1 - a$, vemos que cuando $a = 1$ se convierte en A, y cuando $a = 0$ se convierte $1 + A$, que se reduce por la Proposición I al 1. De aquí podemos inferir que E será el producto de los coeficientes de aquellos constituyentes en el desarrollo de V cuyos coeficientes en el desarrollo de $\phi(x, y)$ son 1.

Además E' será el producto reducido

$$(A + a)(B + b)(C + c)(D + d).$$

Considerando cada uno de estos factores, como $A + a$, vemos que esto se convierte en A cuando $a = 0$, y se reduce a 1 cuando $a = 1$; y así para los demás. De aquí que E' será el producto de los coeficientes de aquellos constituyentes en el desarrollo de y, cuyos coeficientes en el desarrollo $\phi(x, y)$ son 0. Viendo estos casos en conjunto, podemos establecer la siguiente Regla:

9. *Para deducir a partir de una ecuación lógica la relación de cualquier clase expresada por una combinación dada de los símbolos x, y, etc. con las clases representadas por cualesquiera otros símbolos en la ecuación dada.*

REGLA.– *Desarrollar la ecuación dada con referencia a los símbolos x, y, V a continuación formar la ecuación*

$$Et + E'(1 - t) = 0,$$

en que E es el producto de los coeficientes de todos aquellos constituyentes del desarrollo anterior, cuyos coeficientes en la expresión de la clase dada son 1, y E' el producto de los coeficientes de aquellos constituyentes del desarrollo cuyos coeficientes en la expresión de la clase dada son 0. El valor de t deducido a partir de la anterior ecuación por solución e interpretación será la expresión pedida.

NOTA.– *Aunque en la demostración de esta Regla V se supone que está compuesta únicamente de términos positivos, puede mostrarse fácilmente que esta condición es innecesaria, y la Regla general, y que no se requiere realmente ninguna preparación de la ecuación dada.*

10. Ejemplo 3.– La misma definición de riqueza dada en el Ejemplo 2, requería una expresión para *cosas transferibles, pero no productoras de placer, t(1 – p),* en términos de los otros elementos representados por w, s y r.

La ecuación

$$w - stp - str\,(1 - p) = 0,$$

da, al elevarla al cuadrado,

$$w + stp + str\,(1 - p) - 2wstp - 2wstr\,(1 - p) = 0;$$

y desarrollando el primer miembro con respecto a t y p.

$$(w + s - 2ws)\,tp + (w + sr - 2wsr)\,t\,(1 - p) + w\,(1 - t)\,p + w\,(1 - t)\,(1 - p) = 0.$$

Cuyos coeficientes es mejor presentarlos como en la siguiente ecuación,

$$\{w\,(1 - s) + s(1 - w)\}tp + \{w(1 - sr) + sr\,(1 - w)\}\,t(1 - p) + w\,(1 - t)p + w\,(1 - t)\,(1 - p) = 0.$$

Representemos la función t(1 – p) a determinar por z, entonces el desarrollo completo de z con respecto a t y p es

$$z = 0\,tp + t\,(1 - p) + 0\,(1 - t)\,p + 0\,(1 - t)\,(1 - p).$$

De aquí, por el último problema, tenemos

donde

$$Ez + E'(1 - z) = 0;$$

$$E = w(1 - sr) + sr(1 - w);$$

$$E' = \{w(1 - s) + s(1 - w)\} \times w \times w = w(1 - s);$$

$$\therefore \{w(1 - sr) + sr(1 - w)\} z + w(1 - s)(1 - z) = 0.$$

De aquí

$$z = \frac{w(1 - s)}{2wsr - ws - sr}$$

$$= \frac{0}{0} wsr + 0\, ws(1 - r) + \frac{1}{0} w(1 - s) r + \frac{1}{0} w(1 - s)(1 - r),$$

$$+ 0\,(1 - w)\, sr + \frac{0}{0}(1 - w)\, s(1 - r) + \frac{0}{0}(1 - w)(1 - s)\, r$$

$$+ \frac{0}{0}(1 - w)(1 - s)(1 - r).$$

ó

$$z = \frac{0}{0} wsr + \frac{0}{0}(1 - w)\, s(1 - r) + \frac{0}{0}(1 - w)(1 - s),$$

con

$$w(1 - s) = 0.$$

De aquí que, *Las cosas transferibles y no productoras de placer son o bien la riqueza (limitada en cuanto a la oferta y preventiva del dolor), o las cosas que no son riquezas, pero son limitadas en cuanto a la oferta y no preventivas del dolor, o las cosas que no son riqueza, y no son limitadas en cuanto a la oferta.*

Los siguientes resultados, deducidos de una manera similar, se verificarán facilmente:

Las cosas limitadas en cuanto a la oferta productoras de placer que no son riqueza, – son intransferibles.

La riqueza que no es productora de placer es transferible, limitada en cuanto a la oferta y preventiva del dolor.

Las cosas limitadas en cuanto a la oferta que son o bien riqueza, o son productoras de placer, pero no ambas cosas, – son o bien transferibles y preventivas del dolor, o intransferibles.

11. Del ámbito de la historia natural podrían seleccionarse un gran número de curiosos ejemplos. No entiendo, sin embargo, que tales aplicaciones posean un valor independiente. No arrojarían, por ejemplo, ninguna luz sobre los verdaderos principios de clasificación en la ciencia de la zoología. Para el descubrimiento de ellos se requieren algunas bases de conocimiento positivo, – algunos conocimientos de las estructuras orgánicas, con adaptación teleológica; y esta es una especie de conocimiento que puede derivarse únicamente de la utilización de métodos externos de observación y análisis. Tomando, sin embargo, cualquier conjunto de proposiciones de historia natural, se presentan por si mismos un gran número de problemas lógicos, sin tener en cuenta el sistema de clasificación adoptado. Quizá al formar tales ejemplos sea mejor evitar, por superflua, la mención de aquella propiedad de una clase o especie que se sugiera inmediatamente por su nombre, ejemplo, la estructura en anillo de los anélidos, una clase de animales que incluye el gusano de tierra y la sanguijuela.

Ejemplo 4.- Los anélidos son blandos o desnudos o encerrados en un tubo.

2. Los anélidos constan de todos los animales invertebrados que tienen sangre roja en un sistema doble de vasos de circulación. Hagamos

a = anélidos

s = animales blandos

n = desnudos

t = encerrados en un tubo

i = invertebrados

r = que tienen sangre roja, etc.

Entonces las proposiciones dadas se expresarán por las ecuaciones

$$a = vs\,\{n\,(1-t) + t\,(1-n)\}\,; \qquad (1)$$

$$a = ir\,; \qquad (2)$$

a las que podemos añadir la condición implícita

$$nt = 0. \qquad (3)$$

Eliminando v, y reduciendo el sistema a una única ecuación, tenemos

$$a\,\{1 - sn\,(1-t) - st\,(1-n)\} + a\,(1-ir) + ir\,(1-a) + nt = 0. \qquad (4)$$

Supongamos que deseamos obtener la relación en la que se encuentran los animales blandos encerrados en tubos (en virtud de las premisas) con respecto a los siguientes elementos, a saber, la posesión de sangre roja, de una cubierta externa, y de una columna vertebral.

Debemos, en primer lugar, eliminar a. El resultado es

$$ir\,\{1 - sn\,(1-t) - st\,(1-n)\} + nt = 0.$$

Luego (IX. 9), desarrollando con respecto a s y t, y reduciendo el primer coeficiente por la Proposición I, tenemos

$$nst + ir(1-n)s(1-t) + (ir+n)(1-s)t + ir(1-s)(1-t) = 0. \qquad (5)$$

De aquí, si st = w, hallamos

$$nw + ir\,(1-n) \times (ir+n) \times ir\,(1-w) = 0\,;$$

ó

$$nw + ir\,(1-n)\,(1-w) = 0\,;$$

$$\therefore\ w = \frac{ir\,(1-n)}{ir\,(1-n) - n}$$

$$= 0\ irn + ir\,(1-n) + 0i\,(1-r)\,n + \frac{0}{0}\,i\,(1-r)\,(1-n)$$

$$+ 0\,(1-i)\,rn + \frac{0}{0}\,(1-i)\,r\,(1-n) + 0\,(1-i)\,(1-r)\,n$$

$$+ \frac{0}{0}\,(1-i)\,(1-r)\,(1-n)\,;$$

ó

$$w = ir\,(1-n) + \frac{0}{0}\,i\,(1-r)\,(1-n) + \frac{0}{0}\,(1-i)\,(1-n).$$

De donde, *los animales blandos encerrados en tubos constan de todos los animales invertebrados que tienen sangre roja y no están desnudos, y de un resto indefinido de animales invertebrados que no tienen sangre roja y no están desnudos, y de animales vertebrados que no están desnudos.*

Y de una manera exactamente similar, las siguientes ecuaciones reducidas, cuya interpretación se deja al lector, se han deducido a partir del desarrollo (5)

$$s\,(1-t) = irn + \frac{0}{0}\,i\,(1-n) + \frac{0}{0}\,(1-i)$$

$$(1-s)\ \ t = \frac{0}{0}\,(1-i)\,r\,(1-n) + \frac{0}{0}\,(1-r)\,(1-n)$$

$$(1-s)\,(1-t) = \frac{0}{0}\,i\,(1-r) + \frac{0}{0}\,(1-i).$$

En ninguno de los ejemplos anteriores ha sido mi objeto exhibir de manera especial el poder del método. Que, creo, puede únicamente ser enteramente expuesto en conexión con la teoría matemática de las probabilidades. Sugeriría, sin

embargo, a quienes quieran formar una correcta opinión sobre este punto que examinen bajo las reglas de la lógica ordinaria el siguiente problema, *antes* de inspeccionar su solución; recordando a la vez que cualquiera que sea su complejidad, puede multiplicarse indefinidamente, sin ningún otro efecto más que hacer su solución más laboriosa por el método de esta obra, pero no ciertamente menos alcanzable.

Ejemplo 5.– Supongamos que la observación de una clase de productos naturales nos ha conducido a los siguientes resultados generales.

PRIMERO.– Que en cualesquiera de estos productos faltan las propiedades A y C, se encuentra la propiedad E junto con una de las propiedades B y D, pero no con ambas.

SEGUNDO.– Que allí donde se encuentren las propiedades A y D mientras que falte E, las propiedades B y C se encontrarán ambas o faltarán ambas.

TERCERO.– Que allí donde se encuentre la propiedad A en unión, bien de B o de E, o de ambas, se encontrarán, bien la propiedad C o la propiedad D, pero no ambas. Y al contrario, allí donde se encuentre una de las dos propiedades C o D unicamente, se encontrará la propiedad A en unión bien con B o con E, o con ambas.

Requiérase averiguar, primero, qué es lo que en cualquier caso particular se puede concluir a partir de la presencia cierta de la propiedad A, con referencia a las propiedades B, C y D; lo mismo que si existen relaciones independientemente entre las propiedades B, C y D. En segundo lugar, qué puede concluirse de igual manera respecto a la propiedad B, y las propiedades A, C y D.

Se observará que en cada uno de los tres datos, la información comunicada respecto a las propiedades A, B, C y D, está complicada con otro elemento E, acerca del cual no deseamos decir nada en nuestra conclusión. De aquí que se requerirá eliminar el símbolo que representa la propiedad E del sistema de ecuaciones mediante el cual se expresará las proposiciones dadas.

Representemos la propiedad A por x, B por y, C por z, D por w, E por v. Los datos son

$$\bar{x}\bar{z} = qv\,(y\bar{w} + w\bar{y}); \qquad (1)$$

$$\bar{v}xw = q\,(yz + \bar{y}\bar{z}); \qquad (2)$$

$$xy + xv\bar{y} = w\bar{z} + z\bar{w}; \qquad (3)$$

Representando $\bar{x}$ a $1 - x$, etc. y siendo q un símbolo de clase indefinida. Eliminando q separadamente de la primera y segunda ecuaciones y sumando los resultados a la tercera ecuación reducida por (5), capítulo VIII, obtenemos

$$\bar{x}\bar{z}\,(1 - vy\bar{w} - vw\bar{y}) + \bar{v}xw\,(y\bar{z} + z\bar{y}) + (xy + xv\bar{y})\,(wz + \bar{w}\bar{z}) + (w\bar{z} + z\bar{w})\,(1 - xy - xv\bar{y}) = 0. \qquad (4)$$

De esta ecuación debemos eliminar v, y determinar el valor de x a partir del resultado. Para llevar a cabo este propósito, será conveniente emplear el método de la Proposición 3 del presente capítulo.

Representemos así el resultado de la eliminación por la ecuación

$$Ex + E'(1-x) = 0.$$

Para hallar E hagamos $x = 1$ en el primer miembro de (4), hallamos

$$\bar{v}w(y\bar{z} + z\bar{y}) + (y + v\bar{y})(wz + \bar{w}\bar{z}) + (w\bar{z} + z\bar{w})\,\bar{v}\bar{y}.$$

Eliminando v tenemos

$$(wz + \bar{w}\bar{z})\{w(y\bar{z} + z\bar{y}) + y(wz + \bar{w}\bar{z}) + \bar{y}(w\bar{z} + z\bar{w})\};$$

la cual, al multiplicar, de acuerdo con las condiciones $w\bar{w} = 0, z\bar{z} = 0$, etc. da

$$E = wz + y\bar{w}\bar{z}.$$

a continuación, para hallar E' haciendo $x = 0$ en (4), tenemos

$$z(1 - vy\bar{w} - v\bar{y}w) + w\bar{z} + z\bar{w}.$$

de donde, eliminando v, y reduciendo el resultado por las Proposiciones 1 y 2, hallamos

$$E' = w\bar{z} + z\bar{w} + \bar{y}\bar{w}\bar{z};$$

y, por consiguiente, tenemos finalmente

$$(wz + y\bar{w}\bar{z})\,x + (w\bar{z} + z\bar{w} + \bar{y}\bar{w}\bar{z})\,\bar{x} = 0; \qquad (5)$$

a partir de lo cual

$$x = \frac{w\bar{z} + z\bar{w} + \bar{y}\bar{w}\bar{z}}{w\bar{z} + z\bar{w} + \bar{y}\bar{w}\bar{z} - wz - y\bar{w}\bar{z}};$$

por tanto, por desarrollo,

$$x = 0yzw + yz\bar{w} + y\bar{z}w + 0y\bar{z}\bar{w} + 0\bar{y}zw + \bar{y}z\bar{w} + \bar{y}\bar{z}w + \bar{y}\bar{z}\bar{w};$$

o, reuniendo los términos en columnas verticales,

$$x = z\bar{w} + \bar{z}w + \bar{y}\bar{z}\bar{w}; \qquad (6)$$

cuya interpretación es

En cualesquiera substancias en que se encuentre la propiedad A, se encontrará también, o bien la propiedad C, o la propiedad D, pero no ambas, o de otro modo carecerá de todas las propiedades B, C y D. Y al contrario, donde se encuentren o bien la propiedad C, o la propiedad D individualmente, o las propiedades B, C y D estén todas ausentes, se hallará la propiedad A.

Es, también, patente que no existe relación independiente entre las propiedades *B, C* y *D*.

En segundo lugar, debemos hallar y. Ahora bien, desarrollando (5) con respecto a este símbolo,

$$(xwz + x\bar{w}\bar{z} + \bar{x}wz + \bar{x}z\bar{w})\,y + (xwz + \bar{x}w\bar{z} + \bar{x}z\bar{w} + \bar{x}\bar{z}\bar{w})\,\bar{y} = 0\,;$$

de donde, procediendo como antes,

$$y = \bar{x}\bar{w}\bar{z} + \frac{0}{0}(\bar{x}wz + xw\bar{z} + xz\bar{w}), \qquad (7)$$

$$xzw = 0\,; \qquad (8)$$

$$\bar{x}\bar{z}w = 0\,; \qquad (9)$$

$$\bar{x}z\bar{w} = 0\,; \qquad (10)$$

A partir de (10) reducido por solución a la forma

$$\bar{x}z = \frac{0}{0}w\,;$$

tenemos la relación independiente, – *Si la propiedad A está ausente y C presente, D está presente*. Además, por adición y solución (8) y (9) dan

$$xz + \bar{x}\bar{z} = \frac{0}{0}\bar{w}.$$

De donde tenemos para la solución general y la relación independiente restante:

PRIMERO.– *Si la propiedad B está presente en uno de los productos, o bien las propiedades A, C y D están todas ausentes, o bien una sola de ellas está ausente. Y al contrario, si todas están ausentes puede concluirse que la propiedad A está presente (7).*

SEGUNDO.– *Si A y C están ambas presentes o ambas ausentes, D estará ausente, con total independencia de la presencia o ausencia de B (8) y (9).*

No he intentado verificar estas conclusiones.

REFERENCIAS

(7) *τὴν ὑπὲρ ἡμᾶς ἀρετὴν ἡρωϊκήν τινα καὶ θείαν*. Et., Nic. Libro VII

CAPITULO X

DE LAS CONDICIONES DE UN METODO PERFECTO

1. El tema de las Proposiciones Primarias se ha discutido con amplitud, y estamos a punto de comenzar con la consideración de las Proposiciones Secundarias. El intervalo de transición entre estas dos grandes divisiones de la ciencia de la Lógica puede proporcionarnos una ocasión apropiada para hacer una pausa, y mientras revisamos algunos de los anteriores pasos de nuestro progreso, investigar qué es lo que constituye la perfección del método en un tema como del que nos hemos ocupado. No hablo aqui sólo de esa perfección que consiste en el poder, sino también aquella que se funda en la concepción de lo que es apropiado y bello. Es probable que un análisis cuidadoso de esta cuestión nos condujera a conclusiones tales como la siguiente, a saber, que un método perfecto no debería ser unicamente eficaz respecto al cumplimiento de los objetivos a los que se destina, sino que debería manifestar en todas sus partes y procesos una cierta unidad y armonía. Esta concepción se realizaría más completamente si hasta las verdaderas formas del método sugirieran los principios fundamentales, y si es posible del *único* principio fundamental en el cual se fundan. Aplicando estas consideraciones a la ciencia del Razonamiento, podría ser bueno extender nuestra vista más allá de los meros procesos analíticos, e inquirir qué es lo mejor respecto no sólo del modo o forma de deducción, sino también del sistema de datos o premisas a partir de los cuales se efectua la deducción.

2. Respecto al mero poder, no hay duda de que el primero de los métodos desarrollados en el capítulo VIII es, dentro de su esfera propia, perfecto. La introducción de constantes arbitrarias nos independiza de la forma de las premisas, así como de cualesquiera condiciones entre las ecuaciones por las que se representan. Pero parece introducir un elemento extraño, y en tanto que es más laborioso, es también una forma menos elegante de solución que el segundo método de reducción demostrado en el mismo capítulo. Existen, sin embargo, condiciones bajo las cuales el último método asume una más perfecta forma que la que muestra en otras ocasiones. Hacer de la única condición fundamental expresada por la ecuación

$$x(1 - x) = 0,$$

el tipo universal de forma, nos proporcionaría una unidad de carácter para ambos procesos y resultados, que no sería de otro modo alcanzable. Sea la brevedad o la conveniencia la única cualidad valiosa de un método, ninguna ventaja nacería de la adopción de tal principio. Porque imponer a cada paso de una solución el carácter anteriormente descrito supondría en algunos casos una no pequeña labor de reducción preliminar. Pero es siempre interesante saber que ésto puede hacerse, y es incluso de alguna importancia conocer las condiciones bajo las cuales tal forma de solución se presentaría espontáneamente. Algunos de esos puntos se considerarán en el presente capítulo.

PROPOSICION I

3. *Para reducir cualquier ecuación entre símbolos lógicos a la forma* $V = 0$, *en la que* V *satisfaga la ley de la dualidad,*

$$V(1 - V) = 0.$$

Se mostró en el capítulo V, Proposición 4, que la anterior condición se satisface siempre que V sea la suma de una serie de constituyentes. Y es evidente por la Proposición 2, capítulo VI, que son ecuaciones equivalentes todas las que, cuando se reducen por transposición a la forma $V = 0$, producen por desarrollo del primer miembro, la misma serie de constituyentes con coeficientes que no se igualan a cero; careciendo de importancia los valores numéricos particulares de aquellos coeficientes.

De aquí que el propósito de esta Proposición pueda cumplirse siempre llevando todos los términos de una ecuación al primer lado, desarrollando totalmente este miembro, y sustituyendo en el resultado todos los coeficientes que no se hagan cero por la unidad, excepto aquellos que tienen ya este valor.

Pero como el desarrollo de funciones que contienen muchos símbolos nos lleva a expresiones inconvenientes por su gran extensión, es deseable mostrar como, en los únicos casos en que se nos ofrezcan prácticamente a nuestra atención, puede evitarse esta fuente de complejidad.

Las grandes formas primarias de las ecuaciones han sido ya discutidas en el capítulo VIII. Son

$$X = v\,Y,$$
$$X = \quad Y,$$
$$v\,X = v\,Y.$$

Cuando quiera que las condiciones $X(1 - X) = 0$, $Y(1 - Y) = 0$ se satisfagan, hemos visto que las dos primeras ecuaciones anteriores nos conducen a las formas

$$X(1 - Y) = 0, \qquad (1)$$
$$X(1 - Y) + Y(1 - X) = 0; \qquad (2)$$

y bajo las mismas circunstancias puede mostrarse que la última de ellas da

$$v\{X(1-Y)+Y(1-X)\}=0; \qquad (3)$$

todos cuyos resultados satisfacen obviamente en sus primeros miembros, la condición

$$V(1-V)=0.$$

Ahora bien, como las anteriores son las formas y las condiciones bajo las cuales se presentan de hecho las ecuaciones de un sistema lógico expresado con propiedad es siempre posible reducirlas por el método anterior al sometimiento de la ley requerida. Aunque, sin embargo, las ecuaciones separadas pueden así satisfacer la ley, su suma equivalente (VIII. 4) puede que no lo haga, y queda por mostrar cómo bajo este supuesto también puede imponerse la condición requerida.

Representemos la ecuación formada por la adición de varias ecuaciones reducidas del sistema, en la forma

$$v+v'+v'',\ \&c.=0, \qquad (4)$$

siendo esta ecuación separadamente equivalente al sistema a partir del que se obtuvo. Suponemos que v, v′, v′′, etc. son términos de clase (IX. 1) que satisfacen las condiciones

$$v(1-v)=0, \quad v'(1-v')=0,\ \&c.$$

Ahora bien la interpretación completa de (4) se hallaría desarrollando el primer miembro con respecto a todos los símbolos elementales x, y, etc. que contiene, e igualando a 0 todos los constituyentes cuyos coeficientes no se igualen a cero; en otras palabras, todos los constituyentes que se encuentran en v o en v', o en v'', etc. Pero aquellos constituyentes constan de: Primero, lo que se hallan en v; segundo los que no se hallan en v, pero si en v'; tercero, los que no se hallan ni en v ni en v', pero se hallan en v'', etc. De aquí que serán los que se encuentran en la expresión

$$v+(1-v)v'+(1-v)(1-v')v''+\&c., \qquad (5)$$

expresión en la que ningún constituyente se repite, y que obviamente satisface la ley $V(1-V)=0$.

Así si tuvieramos la expresión

$$(1-t)+v+(1-z)+tzw,$$

en la cual los términos 1 − t, 1 − z están entre paréntesis para indicar que deben ser tomados como términos de clase simples, la reduciríamos, de acuerdo con (5), a una expresión que satisfaga la condición $V(1-V)=0$, multiplicando todos los términos a continuación del primero por t, luego todos después del segundo por 1 − v; por último, el término restante después del tercero por z; siendo el resultado

$$1-t+tv+t(1-v)(1-z)+t(1-v)zw. \qquad (6)$$

4. Todas las ecuaciones lógicas son entonces reducibles a la forma $V = 0$, satisfaciendo V la ley de la dualidad. Pero obviamente sería un grado más alto de perfección si todas las ecuaciones se presentaran siempre en tal forma, sin preparación de ninguna clase, y no solamente exhibiesen esta forma en su exposición original, sino que la conservasen sin deterioro tras aquellas adiciones que son necesarias para reducir sistemas de ecuaciones a formas simples equivalentes. Que no presenten espontáneamente esta característica no es atribuible a defecto de método, sino que es una consecuencia del hecho de que nuestras premisas no son siempre completas, y ajustadas, e independientes. No son completas cuando contienen relaciones materiales (como distintas de las formales) que no se expresan. No son ajustadas cuando implican relaciones no pretendidas. Pero dejando a un lado estos puntos, los cuales, en el caso presente nos conciernen menos, considérese en qué sentido son independientes.

5. Un sistema de proposición puede llamarse independiente cuando no es posible deducir a partir de una parte del sistema una conclusión deducible a partir de otra parte de él. Suponiendo las ecuaciones que representan aquellas proposiciones reducidas a la forma

$$V = 0,$$

entonces la anterior condición implica que ningún constituyente que pueda hacerse aparecer en el desarrollo de una función particular V del sistema, puede hacerse aparecer en el desarrollo de cualquier otra función V' del mismo sistema. Cuando esta condición no se satisface las ecuaciones del sistema no son independientes. Esto puede ocurrir en varios casos. Satisfagan todas las ecuaciones en sus primeros miembros la ley de la dualidad, entonces si aparece un término positivo x en la expansión de una ecuación, y un término xy en la de otra, las ecuaciones no son independientes, porque el término x se puede desarrollar aún más en $xy + x(1 - y)$, y la ecuación

$$xy = 0$$

está así contenida en ambas ecuaciones del sistema. Además, aparezca un término xy en una ecuación, y un término xz en otra. Ambos pueden desarrollarse de tal modo que dén el constituyente común xyz. Y pueden imaginarse fácilmente otros casos en los que las premisas que aparezcan a primera vista como totalmente independientes no lo sean realmente. Cuando quiera que ecuaciones de la forma $V = 0$ no son así verdaderamente independientes, aunque individualmente puedan satisfacer la ley de dualidad,

$$V(1 - V) = 0,$$

la ecuación equivalente obtenida sumándolas entre sí no satisfará esa condición, a no ser que se lleven a cabo reducciones suficientes por el método del presente capítulo. Cuando, por otra parte, las ecuaciones de un sistema satisfacen la ley anterior, y son independientes una de otra, su suma satisfará también la misma

ley. He hecho hincapié sobre esos puntos con mayor extensión que de otro modo hubiera sido necesario, porque me parece importante esforzarse en formarnos nosotros mismos, y mantener ante nosotros en todas nuestras investigaciones el modelo de una perfección ideal, -el objeto y la guía de futuros esfuerzos. En la presente clase de investigaciones el objetivo principal de mejora de método sería facilitar, en tanto que sea consistente con la brevedad, la transformación de ecuaciones, como para hacer universal la condición fundamental anteriormente citada.

En conexión con este asunto las siguientes Proposiciones merecen atención.

PROPOSICION II

Si el primer miembro de cualquier ecuación $V = 0$ satisface la condición $V(1 - V)=0$, y si la expresión de cualquier símbolo t de esta ecuación se determina como una función desarrollada de los otros símbolos, los coeficientes de la expansión pueden únicamente asumir las formas 1, 0, 0/0, 1/0.

Porque si se desarrolla esta ecuación con referencia a t, obtenemos como resultado,

$$Et + E'(1 - t), \qquad (1)$$

siendo E y E' lo que V llega a ser cuando t se sustituye en ella sucesivamente por 1 y 0. De aqui que E y E' satisfarán las condiciones

$$E(1 - E) = 0, \quad E'(1 - E') = 0. \qquad (2)$$

Ahora bien (1) da

$$t = \frac{E'}{E' - E},$$

cuyo segundo miembro deberá desarrollarse como una función de los símbolos restantes. Es evidente que los únicos valores numéricos que E y E' pueden recibir en el cálculo de los coeficientes serán 1 y 0. Pueden surgir por consiguiente sólo los siguientes casos:

Primero	$E' = 1$,	$E = 1$,	entonces	$\frac{E'}{E' - E} = \frac{1}{0}$.
Segundo	$E' = 1$,	$E = 0$,	entonces	$\frac{E'}{E' - E} = 1$.
Tercero	$E' = 0$,	$E = 1$,	entonces	$\frac{E'}{E' - E} = 0$.
Cuarto	$E' = 0$,	$E = 0$,	entonces	$\frac{E'}{E' - E} = \frac{0}{0}$.

De donde la verdad de la Proposición queda patente.

6. Puede señalarse que las formas 1, 0, y 0/0 aparecen en la solución de las ecuaciones independientemente de cualquier referencia a la condición $V(1 - V) =$

0. Pero no ocurre lo mismo con el coeficiente $\frac{1}{0}$. Los términos a los que este coeficiente está unido cuando se satisface la anterior condición pueden recibir cualquier otro valor excepto los tres valores 1, 0 y $\frac{0}{0}$, cuando esta condición no se satisface. Se permite, y podría conducir a la uniformidad, cambiar cualquier coeficiente de un desarrollo, que no se presente en ninguna de las cuatro formas referidas en esta Proposición por $\frac{1}{0}$, considerando éste como el símbolo apropiado para indicar que el coeficiente al cual está unido debería igualarse a 0. Este método lo adoptaré frecuentemente.

PROPOSICION III

7. *El resultado de la eliminación de cualesquiera símbolos x, y, etc. de una ecuación* $V = 0$, *cuyo primer miembro satisface idénticamente la ley de la dualidad*

$$V(1 - V) = 0,$$

puede obtenerse desarrollando la ecuación dada con referencia a los otros símbolos, e igualando a 0 la suma de aquellos constituyentes cuyos coeficientes en la expansión son iguales a la unidad.

Supongamos que la ecuación dada V = 0 no contiene mas que tres símbolos, x, y y t, de los cuales x e y deben ser eliminados. Hagamos que el desarrollo de la ecuación con respecto a t sea

$$At + B(1 - t) = 0, \qquad (1)$$

estando A y B libres con respecto al símbolo t.

Por el capítulo IX Proposición 3 el resultado de la eliminación de x e y de la ecuación dada será de la forma

$$Et + E'(1 - t) = 0, \qquad (2)$$

en la cual E es el resultado obtenido al eliminar los símbolos x e y de la ecuación A = 0, siendo E' el resultado obtenido al eliminarlos de la ecuación B = 0.

Ahora bien, A y B deben satisfacer la condición

$$A(1 - A) = 0, \quad B(1 - B) = 0.$$

De aquí que A (ciñéndonos por el momento a este coeficiente) será o bien 0 ó 1, o un constituyente, o la suma de una parte de los constituyentes que comprenden los símbolos x e y. Si A = 0 es evidente que E = 0; si A es un constituyente simple, o la suma de una parte de los constituyentes que comprenden x e y, E será 0. Porque el desarrollo *completo* de A con respecto a x e y contendrá términos con coeficientes que se hacen igual a cero y E es el producto de *todos* los coeficientes. De donde, cuando A = 1, E es igual a A, pero en otros casos E es igual a 0. De modo parejo, cuando B = 1, E' es igual a B, pero en otros casos E' se iguala a cero. De aqui que la expresión (2) comprenderá aquella parte de (1), si hay alguna, en la cual los coeficientes A, B son la unidad. Y este razonamiento es general. Supongamos, por

ejemplo, que V comprende los símbolos x, y, z, t, y que se requiere eliminar x e y. Entonces, si el desarrollo de V con referencia a z y t fuera

$$zt + xz(1 - t) + y(1 - z)t + (1 - z)(1 - t),$$

el resultado buscado sería

$$zt + (1 - z)(1 - t) = 0,$$

siendo ésto aquella parte del desarrollo cuyos coeficientes son la unidad.

De aquí que si a partir de cualquier sistema de ecuaciones deducimos una única ecuación equivalente $V = 0$, satisfaciendo V la condición

$$V(1 - V) = 0,$$

se puede prescindir enteramente de los procesos ordinarios de eliminación, y el simple proceso de desarrollo puede reemplazar su lugar.

8. Puede ser que no haya ninguna ventaja práctica en el método así apuntado, pero posee una unidad teorética y una completitud que le hace merecedor de consideración, y dedicaré un futuro capítulo (XIV) a su ilustración. El progreso de las matemáticas aplicadas ha presentado otros y significados ejemplos de la reducción de sistemas de problemas o ecuaciones al dominio de alguna ley central pero extensiva (Pervading).

9. Se ve por lo que precede que hay una clase de proposiciones para las que son innecesarias todas las aplicaciones especiales de los métodos de preparación mencionados más arriba. Es la que está caracterizada por las siguientes condiciones:

PRIMERO.– Que las proposiciones sean del tipo ordinario caracterizado por el uso de la cópula *es* o *son*, siendo los predicados particulares.

SEGUNDO.– Que los términos de la proposición sean inteligibles sin la suposición de una relación conocida entre los elementos que entran en la expresión de aquellos términos.

TERCERO.– Que las proposiciones sean independientes.

Podemos, si tal especulación no es enteramente vana, permitirnos conjeturar que esas son las condiciones que se obedecerían en el empleo del lenguaje como instrumento de la expresión y del pensamiento, por seres infalibles, que declaran simplemente lo que quieren decir, sin supresión, por una parte, y sin repetición por otra. Consideradas tanto en su relación con la idea de un lenguaje perfecto cuanto en su relación con los procesos de un método exacto, estas condiciones son igualmente dignas de la atención del estudioso.

CAPITULO XI

DE LAS PROPOSICIONES SECUNDARIAS Y DE LOS PRINCIPIOS DE SU EXPRESION SIMBOLICA

1. Se ha establecido ya en el capítulo IV la doctrina de que toda proposición lógica puede referirse a una u otra de las dos grandes clases, a saber, Proposiciones Primarias y Proposiciones Secundarias. La primera de estas clases ha sido discutida en los capítulos precedentes de esta obra, y nos dirigimos ahora a la consideración de las Proposiciones Secundarias, esto es, de las proposiciones que conciernen, o se refieren a otras proposiciones consideradas como verdaderas o falsas. La investigación en la que entramos se parecerá en su ordenación general y desarrollo a aquella que ya hemos llevado a cabo. Las dos investigaciones difieren en lo referente a los temas de pensamiento que reconocen, no sobre las leyes formales y científicas que revelan, o los métodos o procesos que están fundados sobre aquellas leyes. La probabilidad favorecerá en alguna medida la expectativa de tal resultado. Armoniza con todo lo que conocemos de la uniformidad de la Naturaleza, y todo lo que creemos de la inmutable constancia del Autor de la Naturaleza, suponer que en la mente, que ha sido dotada con tan altas capacidades no sólo para tratar con escenarios circundantes, sino también para el conocimiento de sí misma, y para la reflexión sobre las leyes de su propia constitución, exista una armonía y uniformidad no menos real que aquella que el estudio de las ciencias físicas nos hace conocer. Anticipaciones como ésta nunca deberían constituir la regla primaria de nuestras investigaciones, ni van a desviarnos en grado alguno de aquellas labores de paciente búsqueda por las cuales averiguamos cual es la constitución efectiva de las cosas dentro del ámbito propuesto a la investigación. Pero cuando los fundamentos de la semejanza han sido determinados justa e independientemente, no es inconsistente, incluso para fines puramente científicos hacer de esta semejanza un tema de meditación, trazar su extensión, y recibir las insinuaciones de la verdad, aún sin descubrir, que puede parecernos que nos brinda. La necesidad de una atención final a los hechos no es de este modo descartada, ni se extiende el uso de la analogía más allá de su esfera propia la sugerencia de relaciones que una investigación independiente debe verificar o rechazar.

2. *Proposiciones secundarias son aquellas que conciernen o se refieren a las Proposiciones consideradas como verdaderas o falsas.*

Las relaciones de *cosas* las expresamos mediante proposiciones primarias. Pero podemos hacer de las mismas Proposiciones también el objeto del pensamiento, y expresar nuestro juicios en lo referente a ellas. La expresión de cualquier juicio tal constituye una proposición secundaria. No existe sin embargo proposición alguna respecto a la cual, con un grado competente de conocimiento no seamos capaces de hacer una u otra de estas dos afirmaciones, a saber, o que la proposición es verdadera, o que es falsa; y cada una de estas afirmaciones es una proposición secundaria. *"Es verdad que el sol brilla"; "No es verdad que los planetas brillen con luz propia"*; son ejemplos de esta clase. En el primer ejemplo se afirma que la Proposición "El sol Brilla" es verdadera. En el último se afirma que la Proposición "Los planetas brillan con luz propia" es falsa. Las Proposiciones secundarias también incluyen todos los juicios mediante los que expresamos una relación o dependencia entre proposiciones. A esta clase o división podemos adscribir las proposiciones condicionales como "Si el sol brilla el día será bueno". También muchas proposiciones disyuntivas como "O brilla el sol, o la empresa deberá posponerse". En el primer ejemplo expresamos la dependencia de la verdad de la Proposición "El día será bueno" con respecto a la verdad de la Proposición "El sol brilla". En el último expresamos una relación entre las dos Proposiciones, "El sol brilla", "La empresa se pospondrá" que implica que la verdad de una excluye la verdad de la otra. En la misma clase de proposiciones secundarias podemos también incluir todas aquellas proposiciones que afirman la simultánea verdad o falsedad de proposiciones como, "No es verdad a la vez que "el sol brille" y que "el viaje se pospondrá". Los elementos de distinción que hemos observado pueden incluso estar mezclados en la misma proposición secundaria. Puede comprender a la vez los elementos disyuntivos expresados por *o*, y los elementos condicionales expresados por *si*; además de lo cual, las proposiciones enlazadas pueden ser ellas mismas de un carácter compuesto. Si "El sol brilla", *y* "El ocio lo permite", *entonces* "la empresa se comenzará", *o* "se darán algunos pasos preliminares". En este ejemplo un número de proposiciones están conectadas, no arbitrariamente y sin sentido, sino de manera tal que expresan una conexión *definida* entre ellas, -una conexión que se refiere a su respectiva verdad o falsedad. Esta combinación, así pues, de acuerdo con nuestra definición, forma una Proposición Secundaria.

La teoría de las Proposiciones Secundarias es merecedora de un estudio atento, tanto teniendo en cuenta sus varias aplicaciones, como por aquella próxima y armoniosa analogía, a la que ya nos hemos referido, que mantiene con la teoría de las Proposiciones Primarias. Sobre cada uno de estos puntos deseo ofrecer algunas observaciones adicionales.

3. En primer lugar quisiera hacer notar que es en forma de proposiciones secundarias, al menos tan a menudo como en la de las proposiciones primarias, como se presentan los razonamientos de la vida diaria. También los discursos del

moralista y el metafísico quizá se refieran con menor frecuencia a las cosas y sus cualidades que a principios e hipótesis, refiriéndose a verdades y a la mutua conexión y relación de verdades. Las conclusiones que nuestra limitada experiencia sugiere en relación con las grandes cuestiones de la moral y la sociedad aún sin resolver, manifiestan de más de una manera las limitaciones de su origen humano; y aunque la existencia de principios universales no puede cuestionarse, las fórmulas parciales que abarca nuestro conocimiento de su aplicación están sujetas a condiciones, y excepciones y fallos. De esta manera, en aquellas ramas de la investigación que, por la naturaleza de su objeto, serían las más interesantes de todas, gran parte de nuestro conocimiento actual es hipotético. Que ha existido una fuerte tendencia a la adopción de las mismas formas de pensamiento en tratadistas de filosofía especulativa, se pondrá de manifiesto más adelante. De aquí que la introducción de un método general para la discusión de las proposiciones hipotéticas y otras variedades de proposiciones secundarias nos abrirá un campo más interesante de aplicaciones que el que hemos encontrado hasta ahora.

4. La discusión de la teoría de las proposiciones secundarias es interesante en segundo lugar por la próxima y notable analogía que posee con la teoría de las Proposiciones Primarias. Se verá que las leyes formales a las que están sujetas las operaciones de la mente, son idénticas en expresión en ambos casos. Los procesos matemáticos que se fundan en aquellas leyes son, por tanto, idénticos también. De este modo los métodos que se han investigado en la primera parte de esta obra continuarán siendo útiles en las nuevas aplicaciones a las que vamos a proceder. Pero aunque las leyes y procesos del método permanezcan inalterados, la regla de interpretación debe adaptarse a nuevas condiciones. En lugar de clases de cosas deberemos sustituir proposiciones, y para las relaciones de clases e individuos, deberemos considerar las conexiones de proposiciones o sucesos. Con todo, entre los dos sistemas, aunque diferentes en sentido e interpretación, veremos que existe una relación armoniosa que las abarca, una analogía que, al mismo tiempo que sirve para facilitar la conquista de cada dificultad que aún subsista, es por si misma un interesante tema de estudio, y una prueba concluyente de aquella unidad de carácter que caracteriza la constitución de las facultades humanas.

PROPOSICION I

5. *Para investigar la naturaleza de la conexión de las Proposiciones Secundarias con la idea del Tiempo.*

Es necesario, al entrar en esta investigación, establecer claramente la naturaleza de la analogía que conecta las Proposiciones Secundarias con las Primarias.

Las Proposiciones Primarias expresan relaciones entre cosas, consideradas como partes componentes de un universo, dentro de cuyos límites, sea o no coextensivo con los límites del universo efectivo, se limita el tema de nuestro discurso. Las relaciones expresadas son esencialmente *sustantivas*. Alguno, o todos, o ninguno de los miembros de una clase dada, *son* también miembros de otra clase. Los

objetos a los que se refieren las proposiciones primarias – Las relaciones que expresan entre aquellos objetos – son todas del carácter anterior.

Pero al tratar de las proposiciones secundarias, nos hallamos ocupados con otra clase, tanto de objetos como de relaciones. Puesto que los objetos con los que hemos de habérnoslas, son proposiciones, puede plantearse la cuestión, – ¿Podemos considerar esos objetos también como *cosas*, y referirlos, análogamente con el caso previo, a un universo propio?. Además, las relaciones entre aquellas proposiciones objeto son las relaciones de verdad o falsedad coexistentes, no de equivalencia sustantiva. No decimos, cuando expresamos la conexión entre dos proposiciones distintas que una *es* la otra, sino que usamos algunas formas de hablar como las siguientes, de acuerdo con el significado que deseemos comunicar: "O bien la proposición *X* es verdadera, *o* la proposición *Y* es verdadera"; "Si la proposición *X* es verdadera, la proposición *Y* es verdadera"; "Las proposiciones *X* e *Y* son ambas verdaderas a la vez"; y así sucesivamente.

Ahora bien, al considerar relaciones tales, como las anteriores no somos llamados a preguntar por el alcance completo de su posible significado (pues esto nos enredaría en cuestiones metafísicas de causalidad que están más allá de los límites propios de la ciencia); pero es suficiente averiguar algún sentido que indudablemente poseen, y que es adecuado para los propósitos de la deducción lógica. Tomemos como ejemplo para examen la proposición condicional "Si la proposición *X* es verdadera, la proposición *Y* es verdadera ". Un significado indudable de esta proposición es que el *tiempo* en el que la proposición *X* es verdadera, es el *tiempo* en el que la proposición *Y* es verdadera. Esto, sin duda, es únicamente una relación de coexistencia, y puede o no agotar el sentido de la proposición, pero es una relación contenida realmente en el planteamiento de la proposición, y aún más, es suficiente para todos los propósitos de la inferencia lógica.

El lenguaje de la vida diaria sanciona esta manera de considerar la conexión esencial de las proposiciones secundarias con la noción del tiempo. Así, limitaremos la aplicación de una proposición primaria con la palabra "algunos", pero de las proposiciones secundarias con la palabra "a veces". Decir "A veces triunfa la injusticia" es equivalente a afirmar que hay veces en las que la proposición "La injusticia triunfa ahora" es una proposición verdadera. Hay sin duda proposiciones cuya verdad no está limitada de esta manera a periodos y coyunturas particulares; proposiciones que son verdaderas en todo tiempo, y que han recibido el nombre de "verdades eternas". La distinción debe serle familiar a cualquier lector de Platón y Aristóteles, el último de los cuales, en especial, la emplea para denotar el contraste entre las verdades abstractas de la ciencia, tales como las proposiciones de la Geometría que son siempre verdaderas, y aquellas relaciones de cosas contingentes o fenoménicas que a veces son verdaderas y a veces falsas. Pero las formas de lenguaje en que se expresan ambas clases de proposiciones manifiestan común dependencia de la idea del tiempo; en un caso como limitada a alguna duración finita, en el otro extendida a la eternidad.

6. Puede decirse, indudablemente, que al razonar como de ordinario, somos a menudo inconscientes de esta noción de tiempo contenida en el mismo lenguaje que estamos usando. Pero la observación, aunque justa, sólo sirve para mostrar que comunmente razonamos con la ayuda de palabras y de formas de un lenguaje bien construido, sin atender a los fundamentos ulteriores sobre los que aquellas mismas formas se establecen. El curso de la presente investigación proporcionará una ilustración del mismo principio. Yo mismo me valdré de la noción de tiempo para determinar las leyes de la expresión de las proposiciones secundarias, así como las leyes de combinación de los símbolos por los que se expresan. Pero cuando aquellas leyes y aquellas formas se determinan de una vez se puede prescindir practicamente de esta noción de tiempo (esencial como creo que es para el anterior fin). Podemos entonces pasar a partir de las formas del lenguaje ordinario a las muy análogas formas del instrumento simbólico del pensamiento aquí desarrollado, y usar sus procedimientos, e interpretar sus resultados, sin reconocimiento consciente alguno de la idea de tiempo.

PROPOSICION II

7. *Para establecer un sistema de notación para la expresión de las Propiedades Secundarias, y mostrar que los símbolos que contiene están sujetos a las mismas leyes de combinación que los correspondientes símbolos empleados en la expresión de las Proposiciones Primarias.*

Empleemos las letras mayúsculas X, Y y Z para expresar las proposiciones elementales sobre las que queremos hacer alguna afirmación acerca de su verdad o falsedad, o entre de las cuales buscamos expresar alguna relación en la forma de una proposición secundaria. Y empleemos las correspondientes letras minúsculas x, y, z, consideradas como expresión de operaciones mentales en el siguiente sentido, a saber: Represente x un acto de la mente por el cual fijamos nuestra mirada sobre aquella porción de tiempo para la cual la proposición X es verdadera; y entiéndase este significado cuando se afirma que x *denota* el tiempo para el cual la proposición X es verdadera. Más aún, empleemos los signos conectores $+$, $-$, $=$, etc. en el siguiente sentido, a saber: denote $x + y$ el agregado de aquellas porciones de tiempo para las cuales las proposiciones X e Y respectivamente son verdaderas, estando aquellos tiempos separados enteramente uno del otro. De manera similar, denotemos por $x - y$ aquel resto de tiempo que queda cuando quitamos de la porción de tiempo para la que X es verdadera, aquella parte (por suposición) incluida para la cual Y es verdadera. También indiquemos por $x = y$ que el tiempo para el que la proposicion X es verdadera es idéntico al tiempo para el que la proposición Y es verdadera. Llamaremos a x el *símbolo representativo* de la proposición X, etc.

A partir de las definiciones anteriores se seguirá que tendremos siempre

$$x + y = y + x,$$

pues cada miembro denotará el mismo agregado de tiempo.

Más aún, representemos por xy la realización sucesiva de las dos operaciones representadas por y y x, es decir, la operación mental total que está compuesta de los siguientes elementos, a saber, primero, la selección mental de aquella porción de tiempo para la cual la proposición Y es verdadera, segundo, la selección mental de tal porción de tiempo, de aquella porción tal que contenga el tiempo en que la proposición X es verdadera, siendo el resultado de estos procesos sucesivos el fijar la mirada mental sobre la totalidad de aquella porción de tiempo para la cual las proposiciones X e Y son ambas verdaderas.

A partir de esta definición se seguirá que siempre tendremos

$$xy = yx. \qquad (1)$$

pues ya seleccionemos mentalmente primero aquella porción de tiempo para la que la proposición Y es verdadera, y después del resultado, aquella porción contenida para la cual X es verdadera; o primero aquella porción de tiempo para la cual la Proposición X es verdadera, y a continuación, del resultado, aquella porción contenida en aquella para la que la Proposición Y es verdadera, llegaremos al mismo resultado final, a saber, aquella porción de tiempo para la cual las proposiciones X e Y son ambas verdaderas.

Continuando este método de razonamiento puede establecerse que las leyes de combinación de los símbolos x, y, z, etc. en la clase de interpretación que aquí les hemos asignado, son idénticas en su expresión a las leyes de combinación de los mismos símbolos en la interpretación que les asignamos en la primera parte de este tratado. La razón de esta identidad final es patente. Porque en ambos casos es la misma facultad, o la misma combinación de facultades, cuyas operaciones estudiamos; operaciones cuyo carácter esencial permanece inafectado ya las supongamos ocupadas en aquel universo de cosas en el que se contiene toda existencia, o en aquella totalidad de tiempo en la que se realizan todos los acontecimientos, y, en parte al menos, a la que se refieren todas las afirmaciones, verdades y proposiciones.

Así pues, además de todo lo arriba expuesto, tendremos por (4), Cap. II, la ley cuya expresión es

$$x(y + z) = xy + xz; \qquad (2)$$

y más en particular la ley fundamental de la dualidad (2), Cap. II, cuya expresión es

$$x^2 = x, \text{ o, } x(1 - x) = 0; \qquad (3)$$

una ley que, mientras que sirve para distinguir el sistema de pensamiento de la Lógica del sistema de pensamiento de la ciencia de la cantidad, da a los procesos de la primera una completitud y una generalidad que de otro modo no podrían poseer.

8. Además, como esta ley (3) (así como las otras leyes) es satisfecha por los símbolos 0 y 1, somos llevados como antes, a investigar si aquellos símbolos no admiten interpretación en el presente sistema de pensamiento. El mismo curso de razonamiento que hemos seguido anteriormente muestra que sí, y justifica nuestras dos siguientes posiciones, a saber:

1.— Que en la expresión de las proposiciones secundarias *0* representará *nada* con referencia al elemento tiempo.

2.— Que en el mismo sistema *1* representa el universo, o la totalidad del tiempo, a la cual se supone que el discurso de alguna manera se refiere.

Como en las proposiciones primarias el universo del discurso está limitado a veces a una pequeña porción del universo efectivo de las cosas, y es a veces coextensivo con ese universo, del mismo modo en las proposiciones secundarias el universo del discurso puede estar limitado a un sólo día o al momento que pasa, o puede comprender la duración total del tiempo. Puede ser, en el sentido más literal, "eterno". Indudablemente, a menos que haya alguna limitación expresada o implícita en la naturaleza del discurso, la interpretación adecuada del símbolo 1 en las proposiciones secundarias es "la eternidad"; así como su exacta interpretación en el sistema primario es el universo efectivamente existente.

9. En lugar de apropiarnos los símbolos x, y, z para la representación de las verdades de las proposiciones, podemos con la misma corrección aplicarlos para representar el acontecimiento de sucesos. De hecho, el acontecimiento de un suceso implica, a la vez que es implicado la verdad de una proposición, a saber, de la proposición que afirma el acontecer del suceso. Una significación del símbolo x necesariamente involucra la otra. Será conveniente que podamos ser capaces de emplear nuestros signos en cualesquiera de estas interpretaciones realmente equivalentes según las circunstancias de un problema puedan sugerirnos como más deseable; y de esta libertad me valdré siempre que la ocasión lo requiera. En problemas de pura Lógica consideraré que los símbolos x, y, etc., representan proposiciones elementales, la relación entre las cuales está expresada en las premisas. En la teoría matemática de las probabilidades que, como antes hemos insinuado, (I. 12), descansa sobre una base Lógica, y que proyectamos tratar en una parte posterior de esta obra, emplearé los mismos símbolos para expresar los sucesos simples, cuya frecuencia de aparición implícita o buscada cuenta entre sus elementos.

PROPOSICION III

10. *Para deducir Reglas Generales para la expresión de Proposiciones Secundarias.*

En las diversas investigaciones que surgen de esta Proposición, lo menos necesario será una gran riqueza de demostración, por la exacta analogía que poseen respecto a investigaciones similares ya completadas con referencia a las proposiciones primarias. Consideraremos en primer lugar la expresión de los términos; en segundo lugar, la de las proposiciones mediante las cuales están conectados.

Así como 1 indica la total duración del tiempo, y x aquella porción de él para la cual es verdadera la proposición X, 1 – x indicará aquella porción de tiempo para la cual la proposición X es falsa.

Además, como *xy* indica aquella porción de tiempo para la cual las proposiciones *X* e *Y* son ambas verdaderas, la combinación de esto con la observación previa nos conducirá a las siguientes interpretaciones a saber:

La expresión $x(1 - y)$ representará el tiempo durante el cual la proposición *X* es verdadera, y la proposición *Y* falsa. La expresión $(1 - x)(1 - y)$ representará el tiempo durante el cual las proposiciones *X* e *Y* son simultáneamente falsas.

La expresión $x(1 - y) + y(1 - x)$ expresará el tiempo durante el cual o bien *X* es verdadera o bien *Y* es verdadera, pero no ambas; porque este tiempo es la suma de los tiempos en los cuales son individual y exclusivamente verdaderas. La expresión $xy + (1 - x)(1 - y)$ expresará el tiempo durante el cual *X* e *Y* son o bien ambas verdaderas o bien ambas falsas.

Si se presenta otro símbolo *z*, permanecen aplicables los mismos principios. Así *xyz* denota el tiempo en el cual las proposiciones *X*, *Y* y *Z* son simultáneamente verdaderas; $(1 - x)(1 - y)(1 - z)$ el tiempo en que son simultáneamente falsas; y la suma de estas expresiones denotará el tiempo en que son o bien verdaderas o bien falsas todas juntas.

Los principios generales de interpretación contenidos en los ejemplos anteriores no necesitan una mayor ilustración o un planteamiento más explícito.

11. Las leyes de la expresión de las proposiciones pueden ahora mostrarse y estudiarse en los distintos casos en los que se presentan. Existe, sin embargo, un principio de fundamental importancia al que quiero dirigir la atención en primer lugar. Aunque los principios de la expresión que hemos establecido son perfectamente generales, y nos capacitan para limitar nuestras afirmaciones sobre la verdad o falsedad de las proposiciones a cualesquiera porciones particulares de aquella totalidad de tiempo (bien sea una ilimitada eternidad, o un periodo cuyo principio y cuyo fin están definitivamente fijados, o el momento presente) que constituye el universo de nuestro discurso, sin embargo, tal limitación, en el procedimiento efectivo del razonar humano, no se emplea comunmente. Cuando afirmamos que una proposición es verdadera, queremos decir generalmente que es verdadera durante toda la duración del tiempo a que nuestro discurso la refiere; y cuando se hacen a la vez diferentes afirmaciones sobre la incondicional verdad o falsedad de las proposiciones como premisas de una demostración lógica, esas afirmaciones se refieren al mismo universo de tiempo, y no a particulares y limitadas partes de él. En este ámbito necesario que es el tema o campo de las ciencias exactas toda afirmación de una verdad puede ser la afirmación de una "verdad eterna". Al razonar sobre fenómenos pasajeros (como cualquier coyuntura social) cada afirmación puede calificarse por una referencia inmediata al tiempo presente, "Ahora". Pero en ambos casos, a menos que exista una expresión clara de lo contrario, cada proposición aislada se refiere al mismo periodo de duración. Los casos que surgen de este modo ante nuestra consideración son los siguientes:

PRIMERO.– *Para expresar la Proposición "La Proposición X es verdadera".*

Tenemos que expresar aquí que dentro de aquellos límites de tiempo a los que se limita el asunto de nuestro discurso, la proposición X es verdadera. Ahora bien, el tiempo para el cual la proposición X es verdadera se expresa por x, y la extensión de tiempo a la que se refiere nuestro discurso se representa por 1. De donde tenemos

$$x = 1 \qquad (4)$$

para la expresión requerida.

SEGUNDO.– *Para expresar la Proposición "la Proposición X es falsa".*

Tenemos que expresar aquí que dentro de los límites de tiempo a los que se refiere nuestro discurso, la proposición X es falsa; o que dentro de aquellos límites no hay una porción de tiempo para la que sea verdadera. Ahora bien, la porción de tiempo para la que es verdadera es x. De aquí que la ecuación buscada será

$$x = 0. \qquad (5)$$

Este resultado podría obtenerse también igualando a la duración total del tiempo, 1, la expresión del tiempo durante la cual la proposición X es falsa, a saber, $1 - x$. Esto da

$$1 - x = 1,$$

de donde

$$x = 0.$$

TERCERO.– *Para expresar la Proposición disyuntiva "O bien la Proposición X es verdadera o bien la Proposición Y es verdadera"; implicando con esto que las antedichas proposiciones son mutuamente exclusivas, es decir, que sólo una de ellas es verdadera.*

El tiempo para el cual o bien la proposición X es verdadera o bien la proposición Y es verdadera, pero no ambas, se representan por la expresión $x(1 - y) + y(1 - x)$. De aquí tenemos

$$x(1 - y) + y(1 - x) = 1, \qquad (6)$$

para la ecuación pedida.

Si en la anterior Proposición suponemos que las partículas *o, o* no poseen un poder disyuntivo, de modo tal que no se excluye la posibilidad de la verdad simultánea de las proposiciones X e Y, deberemos añadir al primer miembro de las anteriores ecuaciones el término xy. Tendremos así

$$xy + x(1 - y) + (1 - x)y = 1, \qquad (7)$$

o

$$x + (1 - x)y = 1.$$

4. *Para expresar la Proposición condicional "Si la proposición Y es verdadera, la proposición X es verdadera".*

Puesto que siempre que la proposición Y es verdadera, la proposición X es verdadera, es necesario y suficiente expresar aquí que el tiempo en que la proposición Y es verdadera es el tiempo en que la proposición X es verdadera; es decir, que hay alguna porción indefinida de la totalidad del tiempo en la cual la proposición X es verdadera. Ahora bien, el tiempo en el que la proposición Y es verdadera es y, y la totalidad del tiempo en que la proposición X es verdadera es x. Sea v un símbolo de tiempo indefinido, entonces vx representará una porción indefinida del tiempo total x. De acuerdo con esto, tendremos

$$y = vx$$

como expresión de la proposición dada.

12. Cuando v se contempla de este modo como un símbolo de tiempo indefinido, vx puede entenderse como representando la totalidad, o una parte indefinida, o ninguna parte del tiempo total x; porque cada uno de estos sentidos puede darse por una determinación particular del símbolo arbitrario v. Así, si se hace que v represente un tiempo en el que esté incluido la totalidad del tiempo x, vx representará el tiempo total x. Si se hace que v represente un tiempo, parte del cual esté incluido en el tiempo x, pero que no completa la medida de ese tiempo, representará una parte del tiempo x. Si por último, se hace que v represente un tiempo que no tiene ninguna parte común con ninguna parte del tiempo x, vx asumirá el valor 0, y será equivalente a "ningún tiempo", o "nunca".

Ahora bien, hay que observar que la proposición "Si Y es verdadero, X es verdadero" no contiene ninguna afirmación sobre la verdad de las proposiciones X e Y. Puede armonizar igualmente con la suposición de que la verdad de la proposición Y es una condición indispensable para la verdad de la proposición X, en cuyo caso tendremos $v = 1$; o con la suposición de que aunque Y exprese una condición que, cuando se realiza, nos asegura de la verdad de X, puede ser cierta X aún sin implicar la realización de esta condición, en cuyo caso v indica un tiempo, parte del cual está contenido en el tiempo total x; o, finalmente, con la suposición de que la proposición Y no es en lo absoluto verdadera, en cuyo caso v representa algún tiempo, que no tiene ninguna parte común con cualquier parte del tiempo x. Todos estos casos están contenidos en la suposición general de que v es un símbolo de tiempo indefinido.

5. *Para expresar una proposición en la que existan ambos caracteres, el condicional y el disyuntivo.*

La forma general de una proposición condicional es "Si Y es verdadero, X es verdadero", y su expresión es, según la última sección, $y = vx$. Podemos designar correctamente, análogamente con el uso que se estableció en las proposiciones primarias, a Y y X como los *términos* de la proposición condicional en la cual entran; y aún más, podemos adoptar el lenguaje de la Lógica ordinaria, que designa

el término Y, al que está unida la partícula *si*, como el "antecedente" de la proposición, y el término X como el "consecuente".

Ahora bien, en lugar de que los términos, como en el caso anterior, sean simples proposiciones, sean uno u otro una proposición disyuntiva que contenga diferentes términos unidos por las partículas *o, o,* como en los siguientes ejemplos ilustrativos, en los cuales X, Y, Z, etc. expresan simples proposiciones.

1. Si o bien X es verdadera o Y es verdadera, entonces Z es verdadera.

2. Si X es verdadera, entonces o bien Y es verdadera o Z verdadera.

3. Si o bien X es verdadera o Y es verdadera, entonces o bien Z y W son ambas verdaderas, o ambas falsas.

Es evidente que en los casos anteriores la relación del antecedente con el consecuente no está afectada por la circunstancia de que uno de estos términos o ambos tengan un carácter disyuntivo. De acuerdo con esto, únicamente es necesario, de conformidad con los principios ya establecidos, para obtener las expresiones más adecuadas para el antecedente y el consecuente, asignar al último el símbolo indefinido v, e igualar los resultados. Así, para las proposiciones establecidas más arriba tendremos las respectivas ecuaciones

Primero. $$x(1-y)+(1-x)y = vz.$$

Segundo. $$x = v\{y(1-z)+z(1-y)\}.$$

Tercero. $$x(1-y)+y(1-x) = v\{zw+(1-z)(1-w)\}.$$

la regla aquí ejemplificada es de aplicación general.

Son concebibles casos en los que los elementos disyuntivo y condicional entren de una manera diferente a la anterior en la expresión de una proposición compuesta, pero yo no sé que se nos hayan presentado nunca por las naturales exigencias de la razón humana, y por lo tanto me abstengo de discutirlos. No surgirá ninguna dificultad seria de esta omisión puesto que los principios generales que han formado las bases de las anteriores aplicaciones son perfectamente generales, y un ligero esfuerzo de pensamiento los adaptará a cualquier caso imaginable.

13. En las leyes de expresión establecidas más arriba las de interpretación están contenidas implícitamente. La ecuación

$$x = 1$$

debe entenderse que expresa que la proposición X es verdadera; la ecuación

$$x = 0,$$

que la proposición X es falsa. La ecuación

$$xy = 1$$

expresará que las proposiciones X e Y son ambas verdaderas a la vez; y la ecuación

$$xy = 0$$

que no son verdaderas ambas a la vez.

De modo parejo, las ecuaciones

$$x(1-y) + y(1-x) = 1,$$
$$x(1-y) + y(1-x) = 0,$$

afirmarán respectivamente la verdad y la falsedad de la Proposición disyuntiva "o X es verdadera, o Y es verdadera". Las ecuaciones

$$y = vx$$
$$y = v(1-x)$$

expresarán respectivamente las Proposiciones "Si la proposición Y es verdadera, la proposición X es verdadera. "Si la proposición Y es verdadera, la proposición X es falsa".

Se presentarán frecuentemente ejemplos en los capítulos siguientes de esta obra, de un caso en el que algunos términos de un miembro particular de una ecuación estén afectados por el símbolo indefinido v y otros no lo estén. El siguiente ejemplo servirá para ilustración. Supongamos que tenemos

$$y = xz + vx(1-z).$$

Aquí se halla involucrado que el tiempo para el cual la proposición Y es verdadera está compuesto de todo el tiempo para el cual X y Z son verdaderas a la vez, junto con una porción indefinida de tiempo para el cual X es verdadera y Z falsa. A partir de esto se puede ver, Primero, que si Y es verdadera, o bien X y Z son verdaderas a la vez, o X es verdadera y Z falsa: segundo, si X y Z son verdaderas a la vez, Y es verdadera, la última de ellas puede llamarse la interpretación inversa y consiste en tomar el antecedente del segundo miembro, y el consecuente del primer miembro de la ecuación. La existencia de un término en el segundo miembro, cuyo coeficiente es la unidad, hace posible este último modo de interpretación. El principio general que esto contiene puede ser enunciado de esta manera:

14. PRINCIPIO.– *Cualquier término o términos constituyentes de un miembro particular de una ecuación que tengan por coeficiente la unidad, puede tomarse como antecedente de una proposición, todos cuyos términos del otro miembro forman el consecuente.*

Así, la ecuación

$$y = xz + vx(1-z) + (1-x)(1-z)$$

tendría las siguientes interpretaciones:

INTERPRETACION DIRECTA.– *Si la proposición Y es verdadera, entonces o bien X y Z son verdaderas, o X es verdadera y Z falsa, o X y Z son ambas falsas.*

INTERPRETACION INVERSA.– *Si o X y Z son verdaderas, o X y Z son falsas, Y es verdadera.*

La suma de estas interpretaciones parciales expresará la significación total de la ecuación dada.

15. Podemos llamar aquí la atención sobre el hecho de que, aunque la idea de tiempo parece ser un elemento esencial en la teoría de la interpretación de las proposiciones secundarias, puede practicamente olvidarse tan pronto como las leyes de expresión y de interpretación estén claramente establecidas. Las formas a las que estas leyes dan origen parecen, sin duda, corresponder con las formas de un lenguaje perfecto. Imaginemos cualquier lenguaje conocido o existente exento de modismos y desprovisto de superfluidad, y expresemos en este lenguaje una proposición dada de la manera más simple y literal, —la que esté más de acuerdo con aquellos principios de pensamiento puro y universal sobre los cuales se basan todos los lenguajes, de los que todos son la manifestación, pero de los que todos se han separado más o menos. La transición de un lenguaje tal a la notación del análisis no consistiría más que en la sustitución de un conjunto de signos por otro, sin cambio esencial de forma o carácter. Los elementos, sean cosas o proposiciones, cuya relación se expresa, los sustituiríamos por letras: para la conjunción disyuntiva escribiríamos + ; para la cópula conectiva o signo de relación escribiríamos =. No voy a proseguir esta analogía. Su realidad y completitud se harán más aparentes a partir del estudio de aquellas formas de expresión que se presentarán en las subsiguientes aplicaciones de la presente teoría, vistas en una comparación más inmediata con este imperfecto aunque noble instrumento de pensamiento— la lengua castellana.

16. Sobre la analogía general entre la teoría de las Proposiciones primarias y secundarias, deseo añadir unas pocas observaciones antes de abandonar el tema del presente capítulo.

Podríamos indudablemente haber establecido la teoría de las Proposiciones Primarias sobre la simple noción del espacio, de la misma manera que la de las Proposiciones Secundarias se estableció sobre la noción del tiempo. Puede que, si se hubiese hecho esto, la analogía que contemplamos estaría de algún modo más de acuerdo con el punto de vista de aquellos que consideran el espacio y el tiempo meramente como formas del "entendimiento humano", condiciones del conocimiento impuestas por la misma constitución de la mente sobre todo lo que está sometido a su aprehensión. Pero este punto de vista, mientras que por una parte no es susceptible de demostración, por otra nos limita al reconocimiento de "lugar", τὸ ποῦ, como una categoría esencial de la existencia. Indudablemente, la cuestión de si es así o no, me temo, yace más allá del alcance de nuestras facultades; pero puede ser, y creo que lo ha sido, establecido que el proceso formal del razonamiento en las proposiciones primarias no requiere, como condición esencial, la manifestación espacial de las cosas sobre las que razonamos; que permanecerían aplicables, con igual rigurosidad de demostración a las formas de la existencia, si las hay, que se hallan más allá del ámbito de la extensión sensible. Es un hecho, quizá en algún grado análogo a éste, que somos capaces de demostrar en muchos conoci-

dos ejemplos de geometría y dinámica el análisis formal de problemas que se fundan sobre alguna concepción intelectual del espacio diferente de la que se nos presenta por los sentidos, o que puede ser llevada a cabo por la imaginación (8). Entiendo, por tanto, que la idea del espacio no es esencial para el desarrollo de una teoría de las proposiciones primarias, pero estoy dispuesto, aunque desee hablar con timidez de una cuestión de tan extrema dificultad, a pensar que la idea del tiempo es esencial para el establecimiento de una teoría de las proposiciones secundarias. Parece que hay fundamentos para pensar que sin ningún cambio en aquellas facultades que intervienen en el *razonamiento*, la manifestación del espacio a la mente humana podía haber sido diferente de la que es, pero no hay motivos (al menos los mismos) para suponer que la manifestación del tiempo podría haber sido de otra manera que la que percibimos que es. Desechando, sin embargo, estas especulaciones como posiblemente no exentas enteramente de presunción, afirmemos que el fundamento real sobre el cual el símbolo 1 representa en las proposiciones primarias el universo de las cosas, y no el espacio que ocupan, es, que el signo de identidad = que conecta los miembros de las ecuaciones correspondientes implica que las cosas que representan son idénticas no simplemente que se hallen en la misma porción de espacio. Afirmemos de igual manera que la razón por la que el símbolo 1 representa en las proposiciones secundarias no el universo de los sucesos, sino la eternidad en cuyos sucesivos momentos y períodos se desarrollan es que el mismo signo de identidad que conecta los miembros lógicos de las correspondientes ecuaciones implica, no que los sucesos que esos miembros representan sean idénticos, sino que los tiempos de su acaecimiento son los mismos. Estas razones me parece que son decisorias en lo referente a la inmediata cuestión de la interpretación. En un tratado anterior sobre este tema (Mathematical Analysis of Logic, p.49), siguiendo la teoría de Wallis respecto a la reducción de proposiciones hipotéticas, llegué a interpretar el símbolo 1 en las proposiciones secundarias como el universo de "casos" o "coyuntura de circunstancias"; pero esta opinión involucra la necesidad de una definición de lo que se entiende por un "caso" o "coyuntura de circunstancias"; y es cierto que cualquier cosa que se contenga en el término más allá de la noción de tiempo es ajeno a los propósitos y restrictivo de los procesos de la Lógica formal.

REFERENCIAS

(8) El espacio se nos representa en la percepción como poseedor de tres dimensiones, longitud, anchura y profundidad. Pero en una gran parte de problemas relativos a las propiedades de las superficies curvas, las rotaciones de los cuerpos sólidos alrededor de ejes, las vibraciones de los medios elásticos, etc. Esta limitación parece tener en la investigación analítica un carácter arbitrario, y si se prestase atención únicamente a los procesos de solución, no podría descubrirse ninguna razón por la que el espacio no pudiese existir en cuatro o en un mayor número de dimensiones. El procedimiento intelectual en el mundo imaginario así sugerido puede ser aprehendido mediante la luz más clara de la analogía.

La existencia de un espacio en tres dimensiones, y los puntos de vista sobre ellos de las mentes religiosas y filosóficas de la antiguedad se establecen así por Aristóteles:

Μεγέθος δὲ τὸ μὲν ἐφ ἓν, γραμμή, τὸ δ' ἐπὶ δύο ἐπίπεδον, τὸ δ' ἐπὶ τρία σῶμα· Καὶ παρὰ ταῦτα οὐκ ἔστιν ἄλλο μέγεθος, διὰ τὸ τριά πάντα εἶναι καὶ τὸ τρὶς πάντῃ. Κάθαπερ γάρ φασι καὶ οἱ Πυθαγόρειοι, τὸ πᾶν καὶ τὰ πάντα τοῖς τρισὶν ὥρισται. Τελευτὴ γὰρ καὶ μέσον καὶ ἀρχὴ τὸν ἀριθμὸν ἔχει τὸν τοῦ παντός· ταῦτα δὲ τὸν τῆς τριάδος. Διὸ παρὰ τῆς φύσεως εἰληφότες ὥσπερ νόμους ἐκείνης, καὶ πρὸς τὰς ἀγιστείας χρώμεθα τῶν θεῶν τῷ ἀριθμῷ τούτῳ.—*De Cælo*, 1.

CAPITULO XII

DE LOS METODOS Y PROCESOS QUE HAY QUE ADOPTAR EN EL TRATAMIENTO DE LAS PROPOSICIONES SECUNDARIAS

1. Se ha hecho patente a partir de las investigaciones previas (XI.7) que las leyes de combinación de los símbolos literales de la Lógica son las mismas, ya se empleen aquellos símbolos en la expresión de Proposiciones primarias o secundarias, siendo la única diferencia existente entre los dos casos una diferencia de interpretación. Se ha establecido también (V.6) que siempre que distintos sistemas de pensamiento e interpretación se conecten por el mismo sistema de leyes formales, es decir, de leyes relativas a la combinación y uso de los símbolos, los procesos concomitantes, intermedios entre la expresión de las condiciones primarias de un problema y la interpretación de su solución simbólica, son los mismos en ambos casos. De aquí que exista, como entre los sistemas de pensamiento manifestados en las dos formas de Proposiciones primarias y secundarias esta comunidad de ley formal, cuyos procesos han sido establecidos e ilustrados en nuestra discusión de la primera clase de proposiciones, será aplicable, sin ninguna modificación a la última.

2. Así pues, las leyes de los dos procesos fundamentales de eliminación y desarrollo son las mismas en el sistema de proposiciones secundarias y en el sistema de proposiciones primarias. Además, se ha visto (capítulo VI. Proposición II) cómo en las proposiciones primarias la interpretación de cualquier ecuación propuesta desprovista de formas fraccionales puede efectuarse desarrollándola en series de constituyentes, e igualando a 0 cada constituyente cuyo coeficiente no se haga cero. El mismo método es aplicable a las ecuaciones de proposiciones secundarias, y el resultado interpretado a que finalmente nos conduce es, como en el primer caso (VI.6) un sistema de denegaciones coexistentes. Pero mientras en el primer caso la fuerza de esas negaciones se consume sobre la existencia de ciertas clases de cosas, en el último tiene que ver con la verdad de ciertas combinaciones de las proposiciones elementales contenidas en los *términos* de las premisas dadas. Y como en las proposiciones primarias se vió que el sistema de denegaciones admitía la conversión en varias otras formas de proposiciones (VI.7), etc., encontramos que tal conversión será posible aquí también, consistiendo la única diferencia no en las formas de las ecuaciones, sino en la naturaleza de su interpretación.

3. Además, como en las proposiciones primarias, podemos encontrar la expresión de cualquier elemento que entre en un sistema de ecuaciones en términos de los elementos restantes, (VI.10), o de un número elegido de los elementos restantes, e interpretar aquella expresión en una inferencia lógica, el mismo objeto puede llevarse a cabo por los mismos medios, exceptuando sólo la diferencia de interpretación, en el sistema de proposiciones secundarias, la eliminación de aquellos elementos que deseamos que desaparezcan de la solución final, la reducción del sistema a una única ecuación, la solución algebraica y el modo de su desarrollo en una forma interpretable, no difieren en ningún aspecto de los correspondientes pasos en la discusión de las proposiciones primarias.

Para evitar, sin embargo, cualquier posible dificultad, puede ser deseable reunir bajo una Regla general los diferentes casos que se presentan en el tratamiento de las proposiciones secundarias.

REGLA.– *Para expresar simbólicamente las proposiciones dadas (XI.11).*

Eliminar por separado de cada ecuación en que se encuentre el símbolo indefinido v (VII.5).

Eliminar los restantes símbolos que deseemos que desaparezcan de la solución final: siempre antes de la eliminación reducir a una única ecuación aquellas ecuaciones en que se encuentre el símbolo o símbolos que se van a eliminar (VIII.7). Reunir las ecuaciones resultantes en una única ecuación $V = 0$.

Proceder entonces de acuerdo con la forma particular en la que se desea expresar la relación final, como:

PRIMERO.– *Si se halla en la forma de una denegación o sistema de denegaciones, desarrollar la función V e igualar a 0 todos aquellos constituyentes cuyos coeficientes no se hacen cero.*

SEGUNDO.– *Si se halla en la forma de una proposición disyuntiva, igualar a 1 la suma de aquellos constituyentes cuyos coeficientes se hacen cero.*

TERCERO.– *Si se halla en la forma de una proposición condicional que tenga un elemento simple, como* x *o* $1-x$ *por antecedentes, determinar la expresión algebraica de ese elemento, y desarrollar aquella expresión.*

CUARTO.– *Si se halla en la forma de una proposición condicional que tenga una expresión compuesta, como* xy, $xy + (1 - x)(1 - y)$, *etc. por antecedentes, igualar esta expresión a un nuevo símbolo* t, *y determinar* t *como una función desarrollada de los símbolos que van a aparecer en el consecuente, bien por los métodos ordinarios o por el método especial (IX.9).*

QUINTO.– *Interpretar los resultados por (XI.13, 14).*

Si solo se desea averiguar si una proposición particular elemental x *es verdadera o falsa, debemos eliminar todos los símbolos menos* x; *entonces la ecuación* $x = 1$

indicará que la proposición es verdadera, x = 0 que es falsa, 0 = 0 que las premisas son insuficientes para determinar si es verdadera o falsa.

4. Ejemplo 1.– La siguiente predicción se hizo materia de una curiosa discusión en el fragmentario tratado de Cicerón "De Fato": "Si quis (Fabius) natus est oriente Canicula, is in mari non morietur" Le aplicaré el método de este capítulo. Represente y la proposición "Fabio nació a la salida de la canicula". x la proposición "Fabio morirá en el mar". Al decir que x representa la proposición "Fabio, etc..." se quiere decir que x es un símbolo apropiado para (XI.7) la anterior proposición, que la ecuación $x = 1$ afirma, y la ecuación x = 0 niega la verdad de esta proposición. La ecuación que hemos de discutir será

$$y = v(1 - x). \tag{1}$$

y, en primer lugar, pídasenos reducir la proposición dada a una negación o sistema de negaciones (XII.3). Tenemos por transposición

Eliminando v

$$y - v(1 - x) = 0.$$

$$y\{y - (1 - x)\} = 0,$$

o

$$y - y(1 - x) = 0,$$

o

$$yx = 0. \tag{2}$$

La interpretación de este resultado es: –"No es verdad que Fabio naciera a la salida de la Canicula, y morirá en el mar". Cicerón llama a esta forma de proposición "Conjunctio ex repugnantibus"; y hace notar que Crisipo pensaba de este modo para evitar la dificultad que imaginaba existía en las afirmaciones contingentes respecto del futuro: "Hoc loco Chrisippus aestuans falli sperat Chaldaeos caeterosque divinos, neque eos usuros esse conjunctionibus ut ita sua percepta pronuntient: Si quis natus est oriente Canicula is in mari non morietur; sed potius ita dicant: Non et natus est quis oriente Canicula, et in mari morietur. O licentiam jocularem!... Multa genera sunt enuntiandi, nec ullum distirtius quam hoc quo Chrisippus sperat Chaldaeos contentos Stoicorum causa fore". *Cic. De Fato, 7, 8.*

5. Para reducir la proposición dada a una forma disyuntiva.

Los constituyentes que no entran en el primer miembro de (2) son

$$x(1 - y),\ (1 - x)y,\ (1 - x)(1 - y).$$

de donde tenemos

$$y(1 - x) + x(1 - y) + (1 - x)(1 - y) = 1. \tag{3}$$

cuya interpretación es: *–O bien Fabio nació a la salida de la Canicula, y no morirá en el mar; o no nació a la salida de la Canicula, y morirá en el mar; o no nació a la salida de la Canicula, y no morirá en el mar.*

En casos como el anterior, sin embargo, en los que existen constituyentes que difieren uno del otro sólo por un único factor, es lo más conveniente, como hemos visto (VII.15), reunir tales constituyentes en un único término. Si reunimos así el primer y tercer términos de (3) tenemos

$$(1 - y)x + 1 - x = 1;$$

y si reunimos de manera similar el segundo y tercero, tenemos

$$y(1 - x) + 1 - y = 1.$$

Estas formas de la ecuación dan, respectivamente las interpretaciones

O bien Fabio no nació bajo la Canicula, y morirá en el mar, o no morirá en el mar.

O bien Fabio nació bajo la Canicula, y no morirá en el mar, o no nació bajo la Canicula.

Es evidente que estas interpretaciones son estrictamente equivalentes a la primera.

Averigüemos en la forma de una proposición condicional, las consecuencias que surgen de la hipótesis de que "Fabio perecerá en el mar".

En la ecuación (2), que expresa el resultado de la eliminación de v de la ecuación original debemos buscar determinar x como una función de y.

Tenemos

$$x = \frac{0}{y} = 0\,y + \frac{0}{0}(1 - y) \quad \text{desarrollada}$$

o

$$x = \frac{0}{0}(1 - y);$$

cuya interpretación es, – *Si Fabio morirá en el mar, no nació a la salida de la Canicula.*

Estos ejemplos sirven en alguna medida para ilustrar la conexión que se ha establecido en las secciones previas entre las proposiciones primarias y secundarias, una conexión cuyas características distintivas son identidad de proceso y analogía de interpretación.

6. Ejemplo 2.– Hay un argumento notable en la segunda parte de la República de Platón cuya intención es probar la inmutabilidad de la naturaleza divina. Es un muy buen ejemplo de esmerada inducción a partir de ejemplos familiares mediante los cuales Platón llega a principios generales, y a la vez de Lógica clara y conexa por la cual deduce a partir de ellos las inferencias particulares que tiene como objetivo establecer. El argumento está contenido en el siguiente diálogo:

"¿No debe acaso aquello que se aparta de su forma propia ser cambiado por sí mismo o por otra cosa? Necesariamente. ¿No son acaso las cosas que están en mejor

estado las menos cambiadas y molestadas, como el cuerpo con carnes y bebidas, y trabajos, y todas las especies de plantas por los calores y los vientos y afecciones semejantes? ¿No es acaso el más saludable y el más fuerte el menos cambiado? De seguro que sí. ¿Y acaso no es cierto que cualquier problema exterior afecta y cambia menos el alma en la medida en que ésta es más fuerte y más sabia? Y en lo referente a las vasijas y a los muebles y a la ropa, según idéntico principio, ¿no son acaso aquellos que están bien construidos y en buena condición los menos cambiados por el tiempo y otros accidentes? También. Y cualquier cosa que esté en buen estado, ya sea por naturaleza o por arte, o por ambos, no admite el menor cambio procedente de otra cosa. Así parece. Pero Dios y las cosas divinas se hallan en todos los sentidos en el mejor estado. Ciertamente. ¿De este modo Dios sería el último en adoptar muchas formas? El último, ciertamente. Además, ¿debería El transformarse y cambiarse a Sí mismo? Manifiestamente debe hacerlo si es en alguna medida cambiado. ¿Se cambia, pues, a Sí mismo en aquello que es más bueno y puro, o en aquello que es peor y más bajo? Necesariamente en lo que es peor, si es cambiado. Pues nunca diremos que Dios es indigente en cuanto a la belleza o la virtud. Llevas toda la razón, dije, y siendo así la cuestión, ¿te parece, oh Adimantus, que Dios o el hombre se hacen *voluntariamente* a sí mismo en algún sentido peores? Imposible, dijo. Es imposible, pues, dije, que un Dios desee cambiarse a sí mismo; pues siendo eternamente lo más puro y lo mejor, cada uno de ellos permanece siempre absolutamente en la misma forma".

Las premisas del argumento anterior son las siguientes:

PRIMERO.– Si la Deidad sufre cambios, se cambia a sí misma o es cambiada por otro.

SEGUNDO.– Si está en el mejor estado no se cambia por otra.

TERCERO.– La Deidad está en el mejor estado.

CUARTO.–Si la Deidad se cambia por sí misma cambia a un estado peor.

QUINTO.– Si actúa por su voluntad no se cambia a un estado peor.

SEXTO.– La Deidad actúa por su voluntad.

Expresemos los elementos de estas premisas como siguen:

Represente x la proposición "La Deidad sufre cambios".
y, se cambia por sí misma.
z, se cambia por otra.
s, está en el mejor estado.
t, se cambia a un estado peor.
w, actúa por su voluntad.

Entonces, las premisas expresadas en lenguaje simbólico producen, después de la eliminación del símbolo de clase indefinida v, las siguientes ecuaciones:

$$xyz + x(1 - y)(1 - z) = 0, \quad (1)$$
$$sz = 0, \quad (2)$$
$$s = 1, \quad (3)$$
$$y(1 - t) = 0, \quad (4)$$
$$wt = 0, \quad (5)$$
$$w = 1. \quad (6)$$

Manteniendo x, eliminaré en sucesión z, s, y, t, y w (siendo éste el orden en el que aquellos símbolos aparecen en el sistema anterior), e interpretaré los sucesivos resultados.

Eliminando z de (1) y (2), tenemos

$$xs(1 - y) = 0. \quad (7)$$

Eliminando s de (3) y (7)

$$x(1 - y) = 0. \quad (8)$$

Eliminando y de (4) y (8)

$$x(1 - t) = 0. \quad (9)$$

Eliminando t de (5) y (9)

$$xw = 0. \quad (10)$$

Eliminando w de (6) y (10)

$$x = 0. \quad (11)$$

Estas ecuaciones, comenzando por (8), dan los siguientes resultados:

De (8) tenemos $x = \frac{0}{0}$ y, por tanto, *si la Deidad sufre cambios es cambiada por sí misma.*

De (9), $x = \frac{0}{0}t$, *si la Deidad sufre cambios, se cambia a un estado peor.*

De (10), $x = \frac{0}{0}(1-W)$, *si la Deidad sufre cambios no actúa voluntariamente.*

De (11), *la Deidad no sufre cambios.* Este es el resultado de Platón.

Ahora, bien, hemos hecho notar antes que el orden de eliminación es indiferente. Busquemos en el presente caso verificar este hecho eliminando los mismos símbolos en un orden inverso, empezando por w. Las ecuaciones resultantes son,

$$t = 0, \quad y = 0, \quad x(1 - z) = 0, \quad z = 0, \quad x = 0;$$

que producen las siguientes interpretaciones:

Dios no se cambia a un estado peor.
Dios no se cambia a sí mismo.
Si cambia, es otro quien le cambia.
No es cambiado por otro.
El no es cambiado.

Así alcanzamos por un camino diferente la misma conclusión.

Aunque como exhibición del *poder* del método, los ejemplos anteriores tienen escaso valor, tan bien como otros ejemplos más complicados lo harían par ilustrar su naturaleza y carácter.

7. Puede señalarse como ejemplo final de la analogía entre el sistema de las proposiciones primarias y secundarias que en el último sistema también la ecuación fundamental

$$x\,(1 - x) = 0,$$

admite interpretación. Expresa el axioma *Una proposición no puede ser a la vez verdadera y falsa.* Compárese esto con la correspondiente interpretación (III.15). Resuelta bajo la forma

$$x = \frac{0}{1 - x} = \frac{0}{0}\,x,$$

por desarrollo proporciona los respectivos axiomas: "Una cosa es lo que es"; "Si una proposición es verdadera, es verdadera"; formas de lo que se ha llamado el "principio de identidad". Sobre la naturaleza y el valor de estos axiomas se han mantenido las más opuestas opiniones. Algunos los consideran como la verdadera columna vertebral de la Filosofía. Locke les dedica un capítulo encabezado "Sobre las proposiciones fútiles" (9). En ambos puntos de vista parece haber una mezcla de verdad y de error. Vistas como una experiencia que reemplaza a otra, o como aportadores de materiales para las vanas y verbales disputas de las Escuelas, tales proposiciones son algo peor que fútiles. Vistas, por otra parte, como intimamente aliadas con las mismas leyes y condiciones del pensamiento, llegan al menos a tener una importancia especulativa.

REFERENCIAS

(9) Ensayo sobre el entendimiento humano. Libro IV, Cap. VIII.

CAPITULO XIII

ANALISIS DE UNA PARTE DE "DEMOSTRACION DEL SER Y ATRIBUTOS DE DIOS" DEL Dr. SAMUEL CLARKE, Y DE UNA PARTE DE "ETHICA ORDINE GEOMETRICO DEMONSTRATA" DE SPINOZA

1. El orden general que en las investigaciones del siguiente capítulo proyecto seguir es el siguiente. Examinaré cuáles son las premisas efectivas contenidas en las demostraciones de algunas de las proposiciones generales de los anteriores tratados. Ya están expresadas o implícitas. Por las premisas efectivas entiendo cualesquiera proposiciones en que se dan por sentadas en el curso de la argumentación sin que estén probadas y se emplean como partes de la fundamentación sobre la cual se construye la conclusión final. Las premisas así determinadas las expresaré en el lenguaje de los símbolos, y así deduciré a partir de ellas por los métodos desarrollados en los capítulos previos de esta obra las inferencias más importantes que contengan, además de las inferencias particulares realmente extraídas por los autores. En algunos casos modificaré las premisas omitiendo algún hecho o principio contenido en ellas, o por adición o sustitución de alguna proposición nueva, y determinaré de qué manera son afectadas por este cambio las últimas conclusiones. En la prosecución de estos objetivos no me perderé, excepto incidentalmente, en investigar hasta dónde los principios metafísicos que subyacen en estos conocidos productos son dignos de confianza, sino únicamente en averiguar qué conclusiones pueden extraerse adecuadamente a partir de las premisas dadas; y al hacerlo, ejemplificar la perfecta libertad que poseemos en lo relativo a la elección y al orden de los elementos de las proposiciones finales o concluyentes, a saber, en lo referente a determinar qué proposiciones elementales son verdaderas o falsas, y cuáles son verdaderas o falsas bajo restricciones dadas, o en combinaciones dadas.

2. La principal dificultad práctica de esta investigación consistirá no sólo en la aplicación del método a las premisas una vez determinadas, sino en averiguar qué premisas son. En los que son considerados como los ejemplos más rigurosos de razonamiento aplicado a las cuestiones metafísicas, se hallará ocasionalmente que están mezcladas diferentes cadenas de pensamientos; que partes particulares pero esenciales de la demostración se dan interpuestamente, o fuera del curso principal de la argumentación; que el significado de una premisa puede ser en algún grado ambiguo; y, no sin frecuencia, que los argumentos, vistos desde el punto de vista de las leyes estrictas del razonamiento formal, son incorrectos o no concluyentes; la

dificultad de determinar y mostrar las premisas verdaderas de una demostración, puede, en tales casos, ser muy considerable. Pero es una dificultad que debe superarse por todos aquellos que quisieran averiguar si una conclusión determinada está probada o no, cualquiera sea la forma que puedan estar preparados o dispuestos a dar al proceso ulterior del razonamiento. Es una dificultad, así pues, que no es peculiar del método de esta obra, aunque se manifiesta más distintamente en conexión con este método que con cualquier otro. Es tan íntima, sin duda, esta conexión que es imposible, empleando el método de este tratado, incluso conjeturar sobre la validez de una conclusión, sin una aprehensión clara y un exacto establecimiento de todas las premisas sobre las que descansa. En la manera más usual de proceder no hay nada, sin embargo, más común que examinar algunos de los pasos de una cadena de argumentos, y a partir de allí, formar una impresión general vaga del alcance de la totalidad, sin ningún análisis preliminar y cuidadoso de las premisas que contiene.

La necesidad de una determinación rigurosa de las premisas reales de una demostración no debería considerarse como un mal; especialmente porque, cuando esta labor se lleva a cabo, se elimina cualquier fuente de duda o ambigüedad. Al emplear el método de este tratado, el orden en que se colocan las premisas, el modo de conexión que presentan, junto con cualquier circunstancia similar, puede estimarse como indiferente, y el proceso de la inferencia se lleva a cabo con una precisión que puede llamarse, al menos, mecánica.

3. La "Demostración del ser y atributos de Dios", consta de una serie de proposiciones o teoremas, probado cada uno de ellos por medio de premisas, que, en la mayor parte de los casos, pueden descomponerse en dos clases distintas, a saber, hechos de observación, tales como la existencia de un mundo material, el fenómeno del movimiento, etc, y principios hipotéticos, cuya autoridad y universalidad se suponen reconocibles a *priori*. La validez de la demostración depende, realmente, por supuesto, sobre la verdad de los últimos, suponiendo la corrección del razonamiento. Pero piensese lo que se piense sobre sus pretensiones, es incuestionable que, en tanto que realización intelectual, sus méritos son muy altos. Aunque las cadenas de argumentación de que consta generalmente no están muy claramente dispuestas, siempre hay al menos muestras de lógica correcta, y muestran una sutileza de aprehensión y una fuerza de razonamiento que ha sido pocas veces igualada, nunca quizás superada. Vemos en ellos la consumación de aquellos esfuerzos intelectuales que despertaron en el campo de la especulación metafísica, en un período en el que el dominio de los principios hipotéticos era menos cuestionado que ahora, y en que las demostraciones rigurosas de la recién surgida escuela de física matemática parecían haber proporcionado un modelo para dirigirlos. Me parece por esta razón (sin mencionar la dignidad del tema al que se refieren) que merecen una elevada consideración; y no juzgo una tarea vana o superflua emplear sobre algunos de ellos un cuidadoso análisis.

4. La Etica de Benedicto Spinoza es un tratado cuyo objeto es probar la

identidad de Dios y el universo, y establecer sobre esta doctrina un sistema de moral y de filosofía. El análisis de su principal argumento es extremadamente difícil, debido, no a la dificultad de las proposiciones separadas que contiene, sino al uso de definiciones vagas, y de axiomas que, por una especie de defecto de claridad, es dudoso determinar si debemos aceptarlos o rechazarlos. Si el razonamiento del Dr. Samuel Clarke es en parte verbal, el de Spinoza lo es en mucho mayor grado; y es esta quizá la razón por la que a algunas mentes les parece que posee una fuerza formal, a la que en realidad no tiene ninguna pretensión justa. Estos puntos sin embargo, se considerarán en su lugar adecuado.

DEMOSTRACION DE CLARKE

PROPOSICION I

5. "*Algo ha existido desde la eternidad*".

La prueba es la siguiente:

"Puesto que ahora algo es, es manifiesto que siempre fue algo. De otro modo, las cosas que ahora son deberían haber surgido de la nada, absolutamente y sin causa. Lo que es una evidente contradicción en los términos. Porque decir que una cosa es producida, y sin embargo que no hay causa alguna de aquella producción, es decir que algo es causado cuando no es causado por nada, es decir, al mismo tiempo que no es causado en lo absoluto. Cualquier cosa que existe tiene una causa de su existencia, bien sea en la necesidad de su propia naturaleza, y así debe haber sido por sí misma eterna; o bien en la voluntad de algún otro ser, y entonces este otro ser, al menos en orden a la naturaleza, y la causalidad, debe haber existido antes de ello".

Procedamos a analizar la anterior demostración. Su primera oración puede descomponerse en las siguientes proposiciones:

PRIMERO.– Algo es.

SEGUNDO.– Si algo es, o bien siempre fue algo, o las cosas que ahora son deben haber surgido de la nada.

La siguiente parte de la demostración consta de una prueba de que la segunda de las anteriores alternativas, a saber, "Las cosas que ahora son han surgido de la nada", es imposible, y puede descomponerse formalmente como sigue:

TERCERO.– Si las cosas que son han surgido de la nada, algo ha sido causado y al mismo tiempo ese algo no ha sido causado por nada.

CUARTO.– Si ese algo no ha sido causado por nada, no ha sido causado en lo absoluto.

La segunda parte de este argumento parece ser una mera asunción del punto que se debe probar, o un intento de hacer ese punto más claro mediante una exposición verbal diferente.

La tercera y última parte de la demostración contiene una prueba concreta de la verdad, bien de la primera proposición que ha de probarse, a saber, "Algo fue siempre", o bien del punto probado en la segunda parte de la demostración; a saber, la insostenible naturaleza de la hipótesis de que "Las cosas que son ahora han surgido de la nada". Esto puede descomponerse como sigue:

QUINTO.– Si algo es, o bien existe por necesidad de su propia naturaleza, o existe por voluntad de otro ser.

SEXTO.– Si existe por necesidad de su propia naturaleza, siempre algo fue.

SEPTIMO.– Si existe por voluntad de otro ser, entonces la proposición de que las cosas que existen han salido de la nada es falsa.

La última proposición no está expresada en la misma forma en el texto del Dr. Clarke; pero su conclusión expresa referente a la existencia anterior de otro ser, pretende ser equivalente a la negación de la proposición de que las cosas que ahora son han surgido de la nada.

Se hace manifiesto, por tanto, que la demostración consta de dos distintas cadenas de argumentos. Una de estas cadenas comprende lo que he designado como la *primera y segunda* partes de la demostración; la otra comprende la primera y tercera partes. Consideremos la última cadena. Las premisas son:

PRIMERO.– Algo es.

SEGUNDO.– Si algo es, o bien algo siempre fue, o las cosas que ahora son han surgido de la nada.

TERCERO.– Si algo es, o bien existe en la necesidad de su propia naturaleza, o existe por voluntad de otro ser.

CUARTO.– Si existe en la necesidad de su propia naturaleza, algo fue siempre.

QUINTO.– Si existe por voluntad de otro ser, entonces, la hipótesis de que las cosas que ahora son han surgido de la nada, es falsa.

Debemos ahora expresar simbólicamente la anterior proposición. Sea:

x = Algo es.

y = Algo fue siempre.

z = Las cosas que son ahora han surgido de la nada.

p = Existe en la necesidad de su propia naturaleza. (Es decir el *algo* del que hablamos más arriba).

q = Existe por la voluntad de otro ser.

Debe entenderse que por la expresión sea x = "Algo es", se quiere únicamente decir que x es el símbolo representativo de esa proposición (XI. 7), declarando las ecuaciones $x = 1$, $x = 0$, respectivamente, su verdad y falsedad.

Las ecuaciones de las premisas son:

$$
\begin{aligned}
&1^{o} \quad x = 1;\\
&2^{o} \quad x = v\{y(1-z) + z(1-y)\};\\
&3^{o} \quad x = v\{p(1-q) + q(1-p)\};\\
&4^{o} \quad p = vy;\\
&5^{o} \quad q = v(1-z);
\end{aligned}
$$

Y eliminando los varios signos indefinidos v, tenemos

$$1 - x = 0; \tag{1}$$

$$x\{yz + (1-y)(1-z)\} = 0; \tag{2}$$

$$x\{pq + (1-p)(1-q)\} = 0; \tag{3}$$

$$p(1-y) = 0; \tag{4}$$

$$qz = 0. \tag{5}$$

6. En primer lugar, examinaré si a partir de lo anterior se puede deducir alguna conclusión que concierna a la verdad o falsedad de las proposiciones simples representadas por los símbolos y, z, p, q, a saber, de las proposiciones "Algo fue siempre"; "Las cosas que son ahora han surgido de la nada"; "Lo que es existe por la necesidad de su propia naturaleza"; "El algo que es, existe por la voluntad de otro ser".

Para este propósito debemos eliminar separadamente todos los símbolos menos y, todos estos menos z, etc. La ecuación resultante determinará si existen tales relaciones separadas.

Para eliminar x de (1), (2) y (3) es unicamente necesario sustituir en (2) y (3) el valor de x derivado de (1). Hallamos como resultados

$$yz + (1-y)(1-z) = 0. \tag{6}$$

$$pq + (1-p)(1-q) = 0. \tag{7}$$

Para eliminar p tenemos a partir de (4) y (7), por adición,

$$p(1-y) + pq + (1-p)(1-q) = 0; \tag{8}$$

de donde hallamos

$$(1-y)(1-q) = 0. \tag{9}$$

Para eliminar q de (5) y (9), tenemos

$$qz + (1 - y)(1 - q) = 0;$$

de donde hallamos

$$z(1 - y) = 0. \qquad (10)$$

Ahora no permanecen más que las dos ecuaciones (6) y (10), que, sumándolas, dan

$$yz + 1 - y = 0.$$

Eliminando de esta ecuación z, tenemos

$$1 - y = 0, \text{ o, } y = 1. \qquad (11)$$

Eliminando de la misma ecuación y, tenemos

$$z = 0. \qquad (12)$$

La interpretación de (11) es

Algo siempre fue

La interpretación de (12) es

"Las cosas que son no han surgido de la nada".

A continuación, resumiendo el sistema (6), (7) con las dos ecuaciones (4), (5), determinemos las dos ecuaciones que contienen p y q respectivamente.

Para eliminar y tenemos de (4) y (6)

$$p(1 - y) + yz + (1 - y)(1 - z) = (0);$$

de donde

$$(p + 1 - z)\, z = 0, \text{ o, } pz = 0. \qquad (13)$$

Para eliminar z de (5) y (13), tenemos

$$qz + pz = 0;$$

de donde obtenemos

$$0 = 0.$$

No queda ahora más que la ecuación (7), de donde eliminando q, tenemos $0 = 0$ para la ecuación final en p.

De donde no existe ninguna conclusión derivable a partir de las premisas que afirman la simple verdad o falsedad de la proposición "el algo que es existe por la necesidad de su propia naturaleza".

Y como al eliminar p da el mismo resultado $0 = 0$ para la última ecuación en q, se sigue también que *no existe ninguna conclusión deducible a partir de las premisas referente a la simple verdad o falsedad de la proposición "el algo que es existe por la voluntad de otro Ser".*

De las relaciones que conectan más de una de las proposiciones representadas por los símbolos elementales, es innecesario considerar más que la representada por la ecuación (7) que conecta p y q, en la medida en que las proposiciones representadas por los símbolos restantes son absolutamente verdaderas o falsas independientemente de cualquier conexión de la clase de la que hablamos. La interpretación de (7), puesta bajo la forma

$$p\,(1-q) + q\,(1-p) = 1, \text{ es}$$

"El algo que es, existe por la necesidad de su propia naturaleza, o por la voluntad de otro Ser".

He presentado los detalles del anterior análisis quizá con una innecesaria totalidad y prolijidad, porque en los ejemplos que seguirán me propongo más bien indicar los pasos por los que se obtienen los resultados, antes que incurrir en el peligro de una aburrida frecuencia en la repetición. Las conclusiones que han resultado de la anterior aplicación del método, son facilmente verificables por el razonamiento ordinario.

El lector no tendrá dificultad al aplicar el método a la otra cadena de premisas contenidas en la primera Proposición del doctor Clarke, y en deducir a partir de ellas las dos primeras conclusiones a que el anterior análisis ha conducido.

PROPOSICION II

7. *Algún ser invariable e independiente ha existido desde le eternidad.*

Las premisas a partir de las que se prueba la anterior proposición son las siguientes:

PRIMERO.– Algo ha existido siempre.

SEGUNDO.– Si algo ha existido siempre, o bien ha existido algún ser inmutable e independiente, o la totalidad de las cosas existentes han sido incluidas en una sucesión de seres mutables y dependientes.

TERCERO.– Si el universo ha consistido en una sucesión de seres mutables y dependientes, o bien esta serie ha tenido una causa externa, o bien ha tenido una causa interna.

CUARTO.– No ha tenido una causa externa (porque incluye, por hipótesis, todas las cosas que existen).

QUINTO.– No ha tenido una causa interna (porque ninguna parte es necesaria, y si no es necesaria ninguna parte, la totalidad no puede ser necesaria).

Omitiendo, simplemente por brevedad, las pruebas subsidiarias contenidas en los paréntesis de las premisas cuarta y quinta, podemos representar las premisas como sigue:

Sea

x = Algo ha existido siempre.

y = Ha existido algún ser inmutable e independiente.

z = Ha existido una sucesión de seres mutables y dependientes.

p = Esa serie ha tenido una causa externa.

q = Esa serie ha tenido una causa interna.

Así tenemos el siguiente sistema de ecuaciones, a saber:

$$
\begin{aligned}
&1^{o} \quad x = 1 ; \\
&2^{o} \quad x = v\,\{y\,(1 - z) + z\,(1 - y)\} ; \\
&3^{o} \quad z = v\,\{p\,(1 - q) + (1 - p)\,q\} ; \\
&4^{o} \quad p = 0 ; \\
&5^{o} \quad q = 0 :
\end{aligned}
$$

El cual, al eliminar separadamente los símbolos indefinidos v, da

$$
\begin{aligned}
1 - x &= 0 ; && (1) \\
v\,\{yz + (1 - y)\,(1 - z)\} &= 0 ; && (2) \\
z\,\{pq + (1 - p)\,(1 - q)\} &= 0 ; && (3) \\
p &= 0 ; && (4) \\
q &= 0. && (5)
\end{aligned}
$$

La eliminación del anterior sistema de x, p, q e y, conduce a la ecuación

$$z = 0.$$

Y la eliminación de x, p, q, y z, conduce de manera similar a la ecuación

$$y = 1.$$

Cuyas interpretaciones son:

PRIMERO.– *La totalidad de las cosas existentes no ha estado incluida en una sucesión de seres mutables y dependientes.*

SEGUNDO.– *Ha existido un ser inmutable e independiente.*

La segunda de ellas es la proposición que prueba el Dr. Clarke. Como, mediante el análisis precedente, se han determinado todas las proposiciones representadas por los símbolos literales, x, y, z, p, q, como absolutamente verdaderas o falsas, no es

necesario investigar la existencia de otras relaciones que conecten aquellas proposiciones entre si. De la proposición dos se da otra prueba que por brevedad omito. Puede observarse que la "imposibilidad de sucesión infinita", cuya prueba forma una parte del argumento de Clarke, se ha tenido siempre por un principio fundamental de la metafísica, y se ha extendido a otras cuestiones más allá de la casualidad. Aristóteles lo aplica para establecer la necesidad de los primeros principios de la demostración; (10) la necesidad de un fin (el bien) para las acciones humanas, etc... (11) No hay quizá, ningún otro principio al que se refiera con más frecuencia en sus escritos.

Los escolásticos lo aplicaron de manera similar para probar la imposibilidad de una infinita subordinación de géneros y especies, y de aquí, la necesaria existencia de universales. Patentemente, nuestra imposibilidad de formarnos una concepción definida y completa de una serie infinita, es decir, de comprenderla como un *todo*, se ha confundido con una inconsistencia lógica, o una contradición en la idea misma.

8. El análisis del siguiente argumento depende de la teoría de las Proposiciones Primarias.

PROPOSICION III

Aquel ser inmutable e independiente debe ser autoexistente.

Las premisas son:

1.– Todo ser debe haber venido a la existencia bien de la nada, o debe haber sido producido por una causa externa, o debe ser autoexistente.

2.– Ningun ser ha venido a la existencia de la nada.

3.– El Ser inmutable e independiente no ha sido producido por una causa externa.

Para la expresión simbólica de lo anterior, supongamos:

x = Seres surgidos de la nada.

y = Seres que han sido producidos por una causa externa.

z = Seres que son autoexistentes.

w = El Ser inmutable e independiente.

Tenemos entonces

$$x(1-y)(1-z) + y(1-x)(1-z) + z(1-x)(1-y) = 1, \quad (1)$$

$$x = 0, \quad (2)$$

$$w = v(1-y), \quad (3)$$

eliminando v en el último

$$wy = 0. \qquad (4)$$

Cuandoquiera que, como anteriormente, el valor de un símbolo está dado por 0 ó 1, es mejor eliminarlo por simple sustitución. Así la eliminación de x da

$$y(1 - z) + z(1 - y) = 1; \qquad (5)$$

o

$$yz + (1 - y)(1 - z) = 0. \qquad (6)$$

Ahora bien, sumando (4) y (6), y eliminando y, obtenemos

$$w(1 - z) = 0,$$

$$\therefore\ w = vz;$$

Cuya interpretación es.– *El ser inmutable e independiente es necesariamente autoexistente.*

La interpretación de (5) en su forma presente es: *Todo ser ha sido producido por una causa externa o es autoexistente.*

9. En las observaciones del Dr. Samuel Clarke sobre la anterior proposición se da un notable argumento, destinado a probar que el mundo material no es el ser autoexistente del que hablábamos anteriormente.

El pasaje al que me refiere es el siguiente:

"Si se supone que la materia existe necesariamente, entonces en esa existencia necesaria o bien esta incluida la fùerza de la gravitación, o no lo está. Si no, entonces en un mundo meramente material, al que no preside ningún ser inteligente, no podría haber habido ningún movimiento; porque el movimiento, como se ha demostrado anteriormente, y ahora se da por sentado en la cuestión, no es necesario por sí mismo. Pero si la fuerza de la gravitación se incluye en la pretendida existencia necesaria de la materia: entonces siguiéndose necesariamente que debe haber un vacio (como el incomparable Sir Isaac Newton ha demostrado abundantemente que debe haber, si la gravitación es una cualidad o propiedad universal de la materia), se sigue así mismo que la materia no es un ser necesario. Porque si de hecho existe un vacio, entonces es evidentemente más que posible que la materia no exista". (pp. 25, 26)

Se hallará tras un atento examen, que las premisas contenidas, en la anterior demostración son las siguientes:

PRIMERO.– Si la materia es un ser necesario, la propiedad de la gravitación estará necesariamente presente, o necesariamente ausente.

SEGUNDO.– Si la gravitación está necesariamente ausente, y el mundo no está sujeto a la presidencia de una inteligencia, el movimiento no existe.

TERCERO.– Si la propiedad de la gravitación está necesariamente presente, es necesaria la existencia de un vacio.

CUARTO.– Si la existencia de un vacio es necesaria, la materia no es un ser necesario.

QUINTO.– Si la materia es un ser necesario, el mundo no está sujeto a una inteligencia que lo presida.

SEXTO.– El movimiento existe.

De las premisas anteriores, las cuatro primeras están expresadas en la demostración, la quinta está involucrada en la conexión de su primera y segunda oraciones, la sexta expresa un hecho, que el autor parece no haber considerado necesario exponer, pero que es obviamente una parte del fundamento de su razonamiento. Representemos las proposiciones elementales de la siguiente manera:

Sea

x = La materia es un ser necesario.

y = La gravitación está necesariamente presente.

t = La gravitación está necesariamente ausente.

z = El mundo es meramente material, y no sujeto a una inteligencia que lo presida.

w = El movimiento existe.

v = Un vacio es necesario.

Entonces el sistema de premisas se representará por las siguientes ecuaciones, en las que q se emplea como el símbolo de tiempo indefinido:

$$x = q\{y(1-t) + (1-y)t\}.$$
$$tz = q(1-w).$$
$$y = qv.$$
$$v = q(1-x).$$
$$x = qz.$$
$$w = 1.$$

De las cuales, si eliminamos los símbolos q, tenemos el siguiente sistema, a saber:

$$x\{yt + (1-y)(1-t)\} = 0. \quad (1)$$
$$tzw = 0. \quad (2)$$
$$y(1-v) = 0. \quad (3)$$
$$vx = 0. \quad (4)$$
$$x(1-z) = 0. \quad (5)$$
$$1 - w = 0. \quad (6)$$

Ahora bien, si de estas ecuaciones eliminamos *w, v, z, y* y *t,* obtenemos la ecuación

$$x = 0,$$

que expresa la proposición *La materia no es un ser necesario*. Esta es la conclusión del Dr. Clarke. Si intentamos eliminar cualquier otro conjunto de cinco símbolos (excepto el grupo *v, z, y, t* y *x,* que darían $w = 1$) obtenemos un resultado de la forma **0 = 0.** Se hace patente por lo tanto que *no hay ninguna otra conclusión expresiva de la verdad o falsedad absoluta de cualquiera de las proposiciones elementales designadas por símbolos únicos.*

De conclusiones expresadas por ecuaciones que contengan dos símbolos, no existe más que la siguiente, a saber: *Si el mundo es meramente material, y no está sujeto a una inteligencia que lo presida, la gravitación no está ausente necesariamente*. Esta conclusión está expresada por la ecuación

$$tz = 0, \text{ de donde } z = q(1 - t).$$

Si en el anterior análisis suprimimos la premisa final, que expresa el hecho de la existencia del movimiento, y dejamos los principios hipotéticos que están incorporados en las premisas que restan sin alterar, se siguen interesantes conclusiones. A ellas dedicaré la atención en el siguiente capítulo.

10. Del argumento que resta del Dr. Clarke presentaré brevemente su sustancia y conexión, haciendo hincapié solamente sobre ciertas partes que tienen un carácter más complejo que las demás, y proporcionan un ejemplo mejor del método de esta obra.

En la Proposición IV se muestra que la sustancia o esencia del ser auto–existente es incomprensible. El tenor del razonamiento empleado es que ignoramos la naturaleza esencial de todos los demás seres, y mucho más, por tanto, la esencia del ser auto–existente.

En la Proposición V se sostiene que "aunque la sustancia o esencia del ser auto–existente nos es por sí misma absolutamente incomprensible, muchos de sus atributos esenciales son estrictamente demostrables, del mismo modo que su existencia".

En la Proposición VI se argumenta que "el ser auto–existente debe, por necesidad, ser infinito y omnipresente"; y se sostiene que su infinidad debe ser "un infinito tanto de plenitud como de inmensidad". El fundamento en el que se basa la demostración es que una necesidad absoluta de existencia debe ser independiente del tiempo, lugar y circunstancia, libre de límites, y así pues, excluyente de toda imperfección. Y de aquí se infiere que el ser auto–existente debe ser "un ser simplicísimo, invariable, incorruptible, sin partes, forma, movimiento o cualquiera de las propiedades que encontramos en la materia".

Las premisas de hecho empleadas pueden presentarse como sigue:

1.– Si un ser finito es auto–existente, es una contradición suponer que no existe.

2.– Un ser finito puede, sin contradicción, estar ausente de un lugar.

3.– Lo que sin contradicción puede estar ausente de un lugar, puede sin contradicción estar ausente de todos los lugares.

4.–Lo que sin contradicción puede estar ausente de todos los lugares, puede suponerse sin contradicción que no existe.

Supongamos

x = Seres finitos.

y = Cosas auto–existentes.

z = Cosas que es una contradicción suponer que no existen.

w = Cosas que pueden estar ausentes de un lugar sin contradicción.

t = Cosas que, sin contradicción, pueden estar ausentes de todos los lugares.

Expresando lo anterior y eliminando los símbolos indefinidos, tenemos,

$$xy\,(1 - z) = 0. \qquad (1)$$
$$x\,(1 - w) = 0. \qquad (2)$$
$$w\,(1 - t) = 0. \qquad (3)$$
$$tz = 0. \qquad (4)$$

Eliminando sucesivamente t, w, y z, obtenemos

$$xy = 0,$$
$$\therefore y = \frac{0}{0}\,(1 - x);$$

cuya interpretación es *Cualquier cosa que es autoexistente, es infinita.*

En la Proposición VII se arguye que el ser auto–existente debe, por necesidad, ser Uno. El orden de la prueba es que el ser auto–existente es "necesariamente existente", que "la necesidad absoluta en sí misma es simple y uniforme, y sin ninguna posibilidad de diferencia o variedad", que toda "variedad o diferencia de existencia" implica dependencia, y de aquí que "cualquier cosa que exista necesariamente es la única esencia simple del ser auto–existente".

Se hace fluir la conclusión también de las siguientes premisas:

1.– Si hay dos o más seres necesarios e independientes, puede suponerse que uno u otro existen solos.

2.– Si puede suponerse que uno existe solo, no es una contradicción suponer que el otro no existe.

3.– Si no es una contradicción suponer esto, no hay dos seres necesarios e independientes.

Representemos las proposiciones elementales como sigue:

x = existen dos seres necesarios e independientes.

y = cualquiera puede suponerse como existiendo solo.

z = no es una contradicción suponer que el otro no existe.

Así, tenemos procediendo como anteriormente,

$$x(1 - y) = 0. \qquad (1)$$
$$y(1 - z) = 0. \qquad (2)$$
$$zx = 0. \qquad (3)$$

Eliminando y y z, tenemos

$$x = 0.$$

De donde, *No existen dos seres necesarios e independientes.*

11. A las premisas sobre las que descansan las dos proposiciones previas, es bien sabido que el obispo Butler, que en el momento de la publicación de la "Demostración"era estudiante en una academia no conformista, les hizo objeciones en algunas conocidas cartas que, junto con las que le contestó el Dr. Clarke, forman normalmente el apéndice de la obra. La verdadera cuestión en principio es la validez del principio de que "cualquier cosa que sea absolutamente necesaria es absolutamente necesaria en algún lugar del espacio, y en todo punto de duración", un principio asumido en el razonamiento del Dr. Clarke, y explícitamente expuesto en su réplica a la primera carta de Butler, En su segunda comunicación dice Butler: "No concibo que la idea de ubicuidad esté contenida en la idea de auto–existencia, o *que se siga directamente a partir de ella*, de cualquier otra manera que como cualquier cosa que existe debe existir en *algún sitio*". Es decir, la existencia necesaria implica la existencia en alguna parte del espacio, pero no en todas partes. No parece que el Dr. Clarke fuera nunca capaz de demoler efectivamente esta objeción. Toda la correspondencia es extremadamente curiosa e interesante. Las objeciones de Butler son precisamente aquellas que se le ocurrirían a una mente aguda, convencida de que el éxito de la búsqueda de la verdad depende principalmente del atento examen de los primeros principios, más que sobre una destreza mecánica del razonar. Y las réplicas del Dr. Clarke, aunque no se pueden considerar satisfactorias, muestran, en un alto grado, ese peculiar poder intelectual que se manifiesta en la obra a partir de la cual surgió la discusión.

12. En la Proposición VIII se argumenta que el ser auto–existente y causa original de todas las cosas debe ser un Ser Inteligente.

El principal argumento aducido como punto de apoyo de esta proposición es que como la causa es más excelente que el efecto, el ser auto–existente, en cuanto causa y origen de todas las cosas, debe contener en él mismo las perfecciones de todas las cosas; y que la inteligencia es una de las perfecciones que se manifiesta en una parte de la creación. Aún más, se argumenta que esta perfección no es una modificación de forma, divisibilidad o cualesquiera de las propiedades conocidas de la materia; porque estas no son *perfecciones*, sino *limitaciones*. A esto se añade el argumento *a posteriori* de la manifestación del designio en la estructuración del universo.

Se añade, sin embargo, un argumento distinto para la existencia de un ser inteligente auto–existente, fundada sobre la existencia fenoménica del movimiento en el universo. Mostraré brevemente esta prueba, y le aplicaré el método del presente tratado.

El argumento, omitiendo explicaciones sin importancia, es como sigue:

"Es evidente que existe una cosa tal como el movimiento en el mundo; el cual o empezó en algún momento, o es eterno. Si empezó en el tiempo, se concede que la primera causa es un ser inteligente... Por el contrario, si el movimiento es eterno, o bien fue causado desde la eternidad por algún ser eterno e inteligente, o debe por si mismo ser necesario y auto–existente, o de otro modo, sin ninguna necesidad en su propia naturaleza y sin ninguna causa externa necesaria, debe haber existido desde la eternidad por sucesiva comunicación sin fin. Si el movimiento fue eternamente causado por un ser eterno e inteligente, esto también nos da la razón en lo referente a la presente controversia. Si fue necesario y auto–existente por si mismo, se sigue de allí que debe ser una contradicción en los términos suponer a la materia en reposo. Y sin embargo, al mismo tiempo, a causa de su determinación un movimiento auto–existente tiene que existir subitamente, a efecto de lo cual no sería sino un perfecto reposo. Pero si se dijera que el movimiento, sin necesidad alguna en su propia naturaleza y sin ninguna causa externa exterior, ha existido desde la eternidad tan solo merced a una comunicación sucesiva infinita, como Spinoza con bastante inconsistencia parece afirmar, he mostrado antes (en la prueba de la segunda proposición general de este discurso) que es una evidente contradicción. Resulta por tanto, que el movimiento debe necesariamente ser causado por algo inteligente".

Las premisas del anterior argumento pueden disponerse así:

1.– Si el movimiento comenzó en el tiempo, la primera causa es un ser inteligente.

2.– Si el movimiento ha existido desde la eternidad, o bien ha sido causado eternamente por un ser inteligente y eterno, o es auto–existente, o debe haber existido por una comunicación sucesiva sin fin.

3.– Si el movimiento ha sido causado eternamente por un ser inteligente y eterno, la causa primera es un ser inteligente.

4.– Si es auto–existente, la materia está en reposo y no en reposo.

5.– Es falso que el movimiento haya existido por una comunicación sucesiva sin fin, y que al mismo tiempo no sea auto–existente, y no haya sido causado eternamente por un ser eterno e inteligente.

Para expresar esta proposición, supongamos

x = El movimiento comenzó en el tiempo (y por tanto).

$1 - x$ = El movimiento ha existido desde la eternidad.

y = La causa primera es un ser inteligente.

p = El movimiento ha sido causado eternamente por algún ser eterno e inteligente.

q = El movimiento es auto–existente.

r = El movimiento ha existido a causa de una comunicación sucesiva sin fin.

s = La materia está en reposo.

Las ecuaciones de las premisas son por lo tanto

$$\begin{aligned} x &= vy. \\ 1 - x &= v\{p(1-q)(1-r) + q(1-p)(1-r) + r(1-p)(1-q)\}. \\ p &= vy. \\ q &= vs(1-s) = 0. \\ r(1-q)(1-p) &= 0. \end{aligned}$$

dado que, por la cuarta ecuación, $q = 0$, obtenemos al sustituir por q su valor en las ecuaciones restantes, el sistema

$$\begin{aligned} x &= vy, \qquad & 1 - x &= v\{p(1-r) + r(1-p)\}, \\ p &= vy, & r(1-p) &= 0, \end{aligned}$$

del que, eliminando los símbolos indefinidos v, tenemos el sistema final reducido

$$\begin{aligned} x(1-y) &= 0, && (1) \\ (1-x)\{pr + (1-p)(1-r)\} &= 0, && (2) \\ p(1-y) &= 0. && (3) \\ r(1-p) &= 0. && (4) \end{aligned}$$

Buscaremos primero el valor de y, el símbolo contenido en la conclusión del Dr. Clarke. En primer lugar, eliminando x de (1) y (2) tenemos

$$(1-y)\ \{pr+(1-p)(1-r)\}=0. \qquad (5)$$

después al eliminar r de (4) y (5), tenemos

$$r(1-p)+(1-y)\ \{pr+(1-p)(1-r)\}=0,$$
$$\therefore\ \{1-p+(1-y)p\}\times(1-y)(1-p)=0;$$

de donde

$$(1-y)(1-p)=0. \qquad (6)$$

Por último, eliminando p de (3) y (6), tenemos

$$1-y=0,$$
$$\therefore\ y=1,$$

que expresa la conclusión buscada, *La causa primera es un ser inteligente.*

Examinemos ahora qué otras conclusiones son deducibles de las premisas.

Si sustituimos el valor que acabamos de hayar para y en las ecuaciones (1), (2), (3), (4), quedarán reducidas al siguiente par de ecuaciones, a saber

$$(1-x)\ \{pr+(1-p)(1-r)\}=0, \quad r(1-p)=0. \qquad (7)$$

Eliminando x de estas ecuaciones, tenemos

$$r(1-p)=0,$$

de donde

$$r=vp,$$

que expresa la conclusión *Si el movimiento ha existido por una comunicación sucesiva sin fin, ha sido causado eternamente por un ser eterno e inteligente.*

Eliminando otra vez r del par dado, tenemos

$$(1-x)(1-p)=0,$$

o,

$$1-x=vp,$$

que expresa la conclusión *Si el movimiento ha existido desde la eternidad, ha sido causado eternamente por un ser eterno e inteligente.*

Por último, a partir del mismo par original, eliminando p, obtenemos

$$(1-x)r=0,$$

que, resuelto en la forma

$$1 - x = v(1 - r),$$

da la conclusión *Si el movimiento ha existido desde la eternidad, no ha existido por una comunicación sucesiva sin fin.*

Resuelta bajo la forma

$$r = vx,$$

la anterior ecuación nos lleva a la conclusión equivalente *Si el movimiento existe por una comunicación sucesiva sin fin, comenzó en el tiempo.*

13. Ahora bien, se hará manifiesto al lector que la primera y la última de las cuatro conclusiones anteriores son inconsistentes entre sí. Las dos consecuencias extraidas de la hipótesis de que el movimiento existe por una comunicación sucesiva sin fin, a saber, primero que ha sido causado desde la eternidad por un ser eterno e inteligente; segundo que comenzó en el tiempo, se contradicen claramente. Sin embargo, ambas son deducciones rigurosas a partir de las premisas originales. La oposición entre ellas no es de un carácter *lógico*, sino de lo que técnicamente se denomina un carácter *material*. Esta oposición, sin embargo, podía haber sido formulada formalmente en las premisas. Podíamos haberles añadido una proposición formal que afirmara que "todo lo que es causado *eternamente* por un ser eterno e inteligente, no comienza en el tiempo". Si se hubiese hecho esto no podría plantearse una proposición tal como la que ahora aparece en nuestras conclusiones. La lógica formal sólo puede ocuparse de las relaciones que se expresan formalmente (VI. 16); y en casos particulares, puede ser necesario expresar de una manera formal alguna conexión entre las premisas que, sin exposición efectiva, se contenga en el sentido mismo del lenguaje empleado.

Para ilustrar lo que se ha dicho, añadamos a las ecuaciones (2) y (4) la ecuación

$$px = 0,$$

que expresa la condición referida anteriormente. Tenemos

$$(1 - x)\{pr + (1 - p)(1 - r)\} + r(1 - p) + px = 0. \qquad (8)$$

Eliminando p de aquí, encontramos simplemente

$$r = 0,$$

que expresa la proposición *El movimiento no existe por una comunicación sucesiva sin fin*. Si ahora sustituimos r por su valor en (8), obtenemos

$$(1 - x)(1 - p) + px = 0, \text{ o, } 1 - x = p;$$

de donde obtenemos la interpretación *Si el movimiento ha existido desde la eternidad, ha sido causado eternamente por un ser eterno e inteligente*; junto con la proposición inversa.

En la Proposición IX se sostiene que "la causa auto–existente y original de todas las cosas no es un agente necesario, sino un ser dotado de libertad y capacidad de elegir". La prueba se basa principalmente en su posesión de inteligencia y en la existencia de causas finales, lo que implica propósito y elección. A la objección de que la causa suprema opera por necesidad para la producción de lo que es mejor, se replica que ésta es una necesidad de valía moral y sabiduría, y no de naturaleza.

14. En la Proposición X se arguye que "el ser auto–existente, la causa suprema de todas las cosas, debe tener necesariamente un poder infinito". La base de la demostración es que como "todos los poderes de todas las cosas se derivan de él, nada puede oponer ninguna dificultad o resistencia a la ejecución de su voluntad". Se define que el poder infinito del ser auto–existente no se extiende hasta "el hacer una cosa que implique una contradicción", o el hacer algo "que pudiera implicar imperfección (bien natural o moral) en el ser al que se le atribuye tal poder", sino que llega hasta la creación de materia, y de una substancia inmaterial, cogitativa, dotada del poder de comenzar el movimiento, y de la libertad de querer o elegir. Sobre esta doctrina de la libertad de sostiene que somos capaces de dar una respuesta satisfactoria a "aquella antigua e importante cuestión, πόθεν τὸ κακὸν, ¿cuál es la causa y origen del mal?". El argumento sobre esta cuestión lo mostraré brevemente.

"Todo lo que llamamos mal es o un mal de imperfección, como la falta de ciertas facultades o excelencias que poseen otras criaturas, o bien un mal natural, como el dolor, la muerte y cosas similares, o bien un mal moral, como todas las formas de vicio. El primero de estos no es propiamente un mal; porque al ser cada poder, facultad o perfección de que goza una criatura don gratuito de Dios... es claro que la falta de alguna facultad o perfección en algun tipo de criaturas que nunca perteneció a sus naturalezas no es más un mal para ellas, así como podría en absoluto llamarse un mal su no haber sido nunca creadas o traídas al ser. La segunda clase de mal al que llamamos mal natural es o bien una consecuencia necesaria del anterior, como la muerte para una criatura a cuya naturaleza nunca se le confirió la inmortalidad; y entonces, como lo anterior, no es propiamente un mal; o simplemente se contrapesa en su totalidad con un bien grande o mayor, como las aflicciones y sufrimientos de los hombres buenos, y entonces tampoco es propiamente un mal; o simplemente, por último, es un castigo y entonces es una consecuencia necesaria de la tercera y última clase de mal, a saber, el mal moral. Y esto se produce enteramente por el abuso de la libertad que Dios dió a sus criaturas para otros propósitos, y que era justo y conveniente dárselo para perfección y orden de la creación entera. Unicamente ellas, contrariamente a la intención y mandato de Dios, han abusado de lo que era necesario para la perfección de la totalidad, con la consecuencia de la corrupción y depravación de sí mismas. Y así han entrado en el mundo toda suerte de males sin ninguna disminución de la infinita bondad de su Creador y Gobernador". P. 112.

Las premisas principales del anterior argumento pueden exponerse así:

PRIMERA.– Todo lo reputado como un mal es o bien un mal de imperfección, o un mal natural, o un mal moral.

SEGUNDA.– El mal de imperfección no es un mal absoluto.

TERCERA.– El mal natural, es, o bien una consecuencia del mal de imperfección, o bien se compensa con un bien mayor, o es una consecuencia del mal moral.

CUARTA.– Lo que es o bien una consecuencia del mal de imperfección, o bien se compensa con un bien mayor, no es un mal absoluto.

QUINTA.– Todos los males absolutos se incluyen en los que se reputan como males.

Para expresar estas premisas supongamos

w = Lo reputado como un mal.

x = Mal de imperfección.

y = Mal natural.

z = Mal moral.

p = Consecuencia del mal de inperfección.

q = Compensado con un bien mayor.

r = Consecuencia del mal moral.

t = Mal absoluto.

Luego, considerando las premisas como Proposiciones Primarias, cuyos predicados son todos particulares, y las conjunciones o, o, como absolutamente disyuntivas, tenemos las siguientes ecuaciones

$$w = v\{x(1-y)(1-q) + y(1-x)(1-z) + z(1-x)(1-y)\}$$
$$x = v(1-t).$$
$$y = v\{p(1-q)(1-r) + q(1-p)(1-r) + r(1-p)(1-q)\}$$
$$p(1-q) + q(1-p) = v(1-t).$$
$$t = vw.$$

A partir de las cuales, si eliminamos separadamente el símbolo v, tenemos

$$w\{1 - x(1-y)(1-z) - y(1-x)(1-z) - z(1-x)(1-y)\} = 0, \quad (1)$$
$$xt = 0, \quad (2)$$
$$y\{1 - p(1-q)(1-r) - q(1-p)(1-r) - r(1-p)(1-q)\} = 0, \quad (3)$$
$$\{p(1-q) + q(1-p)\}t = 0, \quad (4)$$
$$t(1-w) = 0. \quad (5)$$

Pídase primero hallar qué conclusión nos proporcionan las premisas respecto a los males absolutos, en lo que concierne a su dependencia de los males morales, y las consecuencias de los males morales.

Para este propósito debemos determinar t en términos de z y r. Los símbolos w, x, y, p, q deben para ello ser eliminados. El proceso es fácil, puesto que cada grupo de ecuaciones es reducible por adición a una ecuación única.

Eliminando w de (1) y (5), tenemos

$$t\{1-x(1-y)(1-z)-y(1-x)(1-z)-z(1-x)(1-y)\}=0. \quad (6)$$

La eliminación de p de (3) y (4) da

$$yqr+yqt+yt(1-r)(1-q)=0. \quad (7)$$

La eliminación de q de aquí da

$$yt(1-r)=0. \quad (8)$$

La eliminación de x entre (2) y (6) da

$$t\{yz+(1-y)(1-z)\}=0. \quad (9)$$

La eliminación de y de (8) y (9) da

$$t(1-z)(1-r)=0.$$

Esta es la única relación que existe entre los elementos t, z y r. Obtenemos de aquí

$$\begin{aligned} t &= \frac{0}{(1-z)(1-r)} \\ &= \frac{0}{0}zr+\frac{0}{0}z(1-r)+\frac{0}{0}(1-z)r+0\,(1-z)(1-r) \\ &= \frac{0}{0}z+\frac{0}{0}(1-z)r; \end{aligned}$$

cuya interpretación es "*El mal absoluto es o bien un mal moral, o bien, si no es un mal moral, es una consecuencia del mal moral*".

Cualquiera de los resultados obtenidos en el proceso de la anterior solución, nos proporciona interpretaciones. Así, de (8) podemos deducir

$$\begin{aligned} t = \frac{0}{y(1-r)} &= \frac{0}{0}yr+\frac{0}{0}(1-y)r+\frac{0}{0}(1-y)(1-r) \\ &= \frac{0}{0}yr+\frac{0}{0}(1-y); \end{aligned}$$

de donde "*Los males absolutos son o bien males naturales, que son las consecuencias de males morales, o bien no son males naturales en absoluto*".

Una variedad de otras conclusiones puede deducirse a partir de las ecuaciones dadas, en contestación a las cuestiones que pueden proponerse arbitrariamente. Daré algunos pocos ejemplos de tales, sin mostrar los procesos intermedios de solución.

Pregunta 1.—¿Puede deducirse alguna relación a partir de las premisas que conectan los siguientes elementos, a saber: males absolutos, consecuencias de los males de imperfección, males que se compensan con un bien mayor?.

Respuesta.— *No existe ninguna relación.* Si eliminamos todos los símbolos excepto z, p, q, el resultado es $0=0$.

Pregunta 2.—¿Existe alguna relación entre males absolutos, males de imperfección y consecuencias de los males de imperfección?.

Respuesta.— La relación final entre x, t y p es

$$xt + pt = 0\,;$$

de donde

$$t = \frac{0}{p+x} = \frac{0}{0}(1-p)\,(1-x).$$

por tanto, *Los males absolutos no son ni males de imperfección ni consecuencias de los males de imperfección.*

Pregunta 3.— Pídase la relación entre males naturales y males de imperfección y males que se compensan con un bien mayor. Encontramos

$$pqy = 0,$$

$$\therefore\ y = \frac{0}{pq} = \frac{0}{0}p(1-q) + \frac{0}{0}(1-p).$$

por tanto, *Los males naturales son o bien consecuencias de los males de imperfección que no se compensan con un bien mayor, o no son en absoluto consecuencias de males de imperfección.*

Pregunta 4.—¿En qué relación se encuentran aquellos males naturales que no son males morales con los males absolutos y las consecuencias de los males morales?.

Si $y(1-z) = s$, hallamos después de la eliminación

$$ts\,(1-r) = 0\,;$$

$$\therefore\ s = \frac{0}{t\,(1-r)} = \frac{0}{0}tr + \frac{0}{0}(1-t).$$

por tanto, *Los males naturales que no son males morales, son, o bien males absolutos, que son las consecuencias de males morales, o no son en absoluto males absolutos.*

Las conclusiones siguientes se han deducido de una forma similar. El sujeto de cada conclusión mostrará de qué cosas particulares se requería una descripción, y el predicado mostrará qué elementos debe comprender:

Los males absolutos que no son consecuencia de los males morales, son males morales y no naturales.

Los males absolutos que no son males morales, son males naturales que son las consecuencias de males morales.

Los males naturales que no son consecuencia de los males morales, no son males absolutos.

Por último, busquemos una descripción de los males que no son absolutos, expresada en términos de males naturales y morales.

Obtenemos como ecuación final

$$1 - t = yz + \frac{0}{0} y\,(1 - z) + \frac{0}{0}(1 - y)\,z + (1 - y)\,(1 - z).$$

La interpretación directa de esta ecuación es una verdad necesaria, pero la interpretación inversa es notable. *Los males que son a la vez naturales y morales, y los males que no son ni naturales ni morales, no son males absolutos.*

Esta conclusión, aunque puede no expresar una verdad, está realmente incluida en las premisas dadas tal como están *formalmente* expresadas.

15. Tomemos a partir del mismo argumento un sistema de premisas algo más extenso, y supongamos en esas premisas que las partículas *o, o* no son absolutamente disyuntivas, de modo que en el significado de "o bien mal de imperfección, o mal natural, o mal moral" incluimos todo lo que posea una o más de esas cualidades.

Sean las premisas:

1.– Todo mal (w) es bien un mal de imperfección (x), un mal natural (y), o un mal moral (z).

2.– El mal de imperfección (x), no es el mal absoluto (t).

3.– El mal natural (y) es bien una consecuencia del mal de imperfección (p), o se compensa con un bien mayor (q), o es uan consecuencia del mal moral (r).

4.– Todo lo que es una consecuencia del mal de imperfección (p) no es mal absoluto (t).

5.– Todo lo que se compensa con un bien mayor (q) no es mal absoluto (t).

6.– El mal moral (z) es una consecuencia del abuso de libertad (u).

7.— Lo que es una consecuencia del mal moral (r) es una consecuencia del abuso de libertad (u).

8.— Los males absolutos se incluyen dentro de lo que se reputa como mal.

Las premisas, expresadas del modo usual, dan, después de la eliminación de los símbolos indefinidos v, las siguientes ecuaciones:

$$w(1-x)(1-y)(1-z) = 0, \quad (1)$$
$$xt = 0, \quad (2)$$
$$y(1-p)(1-q)(1-r) = 0, \quad (3)$$
$$pt = 0, \quad (4)$$
$$qt = 0, \quad (5)$$
$$z(1-u) = 0, \quad (6)$$
$$r(1-u) = 0, \quad (7)$$
$$t(1-w) = 0. \quad (8)$$

Cada una de estas ecuaciones satisface la condición V(1-V) = 0.

Se deducen fácilmente los siguientes resultados:

El mal natural es o bien un mal absoluto, que es una consecuencia del mal moral, o no es en absoluto un mal absoluto.

Todos los males son, o bien males absolutos, que son consecuencias del abuso de la libertad, o no son males absolutos.

Los males naturales son, o bien males de imperfección, que no son males absolutos, o no son en lo absoluto males de imperfección.

Los males absolutos son, o bien males naturales, que son consecuencias del abuso de libertad, o no son males naturales y, al mismo tiempo, no son males de imperfección.

Las consecuencias del abuso de libertad incluyen todos los males naturales que son males absolutos y no son males de imperfección, junto con un resto indefinido de males naturales que no son absolutos, y de males que no son naturales.

16. Estos ejemplos serán suficientes como ilustración. El lector puede fácilmente proporcionar otros si se necesitan. Procedemos ahora a examinar las partes más esenciales de la demostración de Spinoza.

DEFINICIONES

1.— Por *causa de si* (*causa sui*) entiendo aquello cuya esencia implica la existencia, o lo que es lo mismo aquella cuya naturaleza solo puede concebirse como existente.

2.– Se llama finita en su género (*in suo genere finita*) a aquella cosa que puede ser limitada por otra de su misma naturaleza. Se dice que es finito un cuerpo porque concebimos siempre otro mayor. Así, un pensamiento es limitado por otro pensamiento. Pero un cuerpo no es, limitado por un pensamiento, ni un pensamiento por un cuerpo.

3.– Por substancia entiendo aquello que es en sí (*in se*), y se concibe por sí (*per se concipitur*), esto es, aquello cuyo concepto para formarse no precisa del concepto de otra cosa.

4.– Por atributo entiendo aquello que en entendimiento percibe de una substancia, como constitutivo de la esencia de la misma.

5.– Por modo entiendo las afecciones de una substancia, o sea aquello que es en otra cosa, mediante la cual es también concebido.

6.– Por Dios entiendo un Ser absolutamente infinito, esto es una substancia que consta de infinitos atributos, cada uno de los cuales expresa una esencia eterna e infinita.

Explicación.– Digo absolutamente infinito, no infinito en su género. Pues de aquello que es meramente infinito en su género podemos negar infinitos atributos. Mientras que a la esencia de lo que es absolutamente infinito pertenece todo cuanto expresa su esencia y no implica negación alguna.

7.– Se llama *libre* a aquella cosa que existe por la sóla necesidad de su naturaleza, y es determinada por sí sola a obrar; y *necesaria*, o mejor compelida, a la que es determinada por otra cosa a existir y operar de cierta y determinada manera.

8.– Por eternidad entiendo la existencia misma, en cuanto que se concibe como siguiéndose necesariamente de la sóla definición de una cosa eterna.

Explicación.– Pues tal existencia, como una verdad eterna, se concibe como la esencia de la cosa, y por eso no puede explicarse por la duración o el tiempo, aunque se piense la duración como careciendo de principio o fin.

AXIOMAS

1.– Todo lo que es, o es en sí (*in se*), o es en otra cosa.

2.– Lo que no puede concebirse por otra cosa debe concebirse por sí.

3.– A partir de una causa determinada dada, se sigue necesariamente el efecto, y al contrario, si no se da causa alguna determinada, es imposible que se siga un efecto.

4.– El conocimiento del efecto depende del conocimiento de la causa y lo implica.

5.– Las cosas que no tienen nada en común una con otra no pueden comprenderse una por otra; esto es, el concepto de una de ellas no implica el concepto de la otra.

6.– Una idea verdadera debe ser conforme a lo ideado por ella (*Idea vera debet cum suo ideato convenire*).

7.– La esencia de todo lo que puede concebirse no existente no implica la existencia.

Hay otras definiciones contenidas y otros axiomas se dan virtualmente por supuestos en algunas de las demostraciones. Así, en la Prop. I, "la substancia es anterior en su naturaleza a sus afecciones", cuya prueba consiste en una mera referencia a las Def. 3 y 5, parece existir una suposición del siguiente axioma, a saber, "Aquello por lo que una cosa se concibe es anterior en naturaleza a la cosa concebida". Además, en la demostración de la Prop. V se da por sentado el inverso de este axioma. Se dan muchos otros ejemplos de la misma clase. Es imposible por ello, deducir por un simple proceso de Lógica la totalidad de las conclusiones del primer libro de la Etica a partir de los axiomas y definiciones que están prefijados a él, y que están dados más arriba. En el breve análisis que seguirá, me esforzaré en presentar en su propio orden las que me parecen que son las premisas reales, formalmente planteadas o implicadas, y mostraré en qué manera contienen las conclusiones a las que fué conducido Spinoza.

17. Concibo, pues, que en el curso de su demostración, Spinoza efectúa varias divisiones paralelas del universo de la existencia posible, como

PRIMERA.– Entre las cosas que son por sí mismas, x, y las cosas que son en otra cosa cualquiera, x', de donde, como esas clases de cosas juntas forman el universo entero, tenemos

$$x + x' = 1 ; \quad \text{(Ax. i.)}$$

ó

$$x = 1 - x'.$$

SEGUNDA.– Entre las cosas que son concebidas por sí mismas, y, y las cosas que son concebidas a través de alguna otra cosa, y'; de donde

$$y = 1 - y'. \quad \text{(Ax. ii.)}$$

TERCERA.– Entre sustancias, z, y modos, z'; de donde

$$z = 1 - z'. \quad \text{(Def. iii. v.)}$$

CUARTA.– Entre cosas libres, f, y cosas necesarias, f'; de donde

$$f = 1 - f'. \quad \text{(Def. vii.)}$$

QUINTA.– Entre cosas que son causas y auto–existentes, e, y cosas causadas por alguna otra cosa, e'; de donde

$$e = 1 - e'. \quad \text{(Def. i. Ax. vii.)}$$

Y su razonamiento procede sobre el principio expreso o supuesto de que estas divisiones no son sólo paralelas sino equivalentes. Así, en la Def. 3, la substancia se hace equivalente a lo que es concebido por sí mismo; de donde

$$z = y.$$

Además, el Ax. IV, tal y como lo aplica Spinoza, establece la identidad de la causa con aquello por lo que se concibe una cosa; de donde

$$y = e.$$

Además, en la Def. 7, se indentifican las cosas libres con las cosas auto–existentes; de donde

$$f = e.$$

Por último, en la Def. 5, se identifica el modo con lo que existe en otra cosa; de donde $z' = x'$ y por tanto

$$z = x.$$

Todos estos resultados pueden reunirse juntos en las siguientes series de ecuaciones, a saber

$$x = y = z = f = e = 1 - x' = 1 - y' = 1 - f' = 1 - z' = 1 - e'.$$

Y dos miembros cualesquiera de esta serie unidos mediante el signo de la igualdad, expresan una conclusión, esté o no extraida por Spinoza, la cual es una legítima consecuencia de su sistema. Así la ecuación

$$z = 1 - e',$$

expresa la proposición sexta de su sistema, a saber, una substancia no puede ser producia por otra. De modo similar la ecuación

$$z = e,$$

expresa su proposición séptima, a saber, "Pertenece a la naturaleza de la substancia el existir". Es innecesario proseguir esta cadena de deducción. Spinoza la aplica principalmente a la de deducción de acuerdo con sus puntos de vista referentes a las propiedades de la Naturaleza Divina, habiendo primero intentado probar que la única substancia es Dios. En los pasos de este proceso me parece que existen algunas falacias, que dependen principalmente del uso ambiguo de las palabras, a las que será necesario prestar atención aquí.

18. En la Prop. V se intenta demostrar que "No existen dos o más substancias de la misma naturaleza o atributo". La prueba es virtualmente la que sigue: si existe más de una substancia, se distinguirán por los atributos o por los modos; si por los atributos, habrá únicamente una substancia con el mismo atributo, si por los modos, dejando estos aparte como no esenciales, no existirá ningún fundamento *real* de distinción. De aquí que no exista sino una substancia con el mismo atribu-

to. Las asunciones contenidas aquí son inconsistentes con aquellas que se hallan en otras partes del tratado. Así, la substancia, Def. 4, es aprehendida por el intelecto a través del atributo. Por la Def. 6, puede tener muchos atributos. Una substancia puede, así pues, *concebiblemente* distinguirse de otra por una diferencia en alguno de sus atributos, en tanto otros permanecen los mismos.

En la Prop. VIII se intenta mostrar que toda substancia es necesariamente infinita. La prueba es como sigue. No existe más que una substancia, de un atributo, Prop. V; y pertenece a su naturaleza el existir, Prop. VII. Será, por tanto, propio de su naturaleza el existir como finita o como infinita. Pero no como finita porque por la Def. 2 ello requeriría estar limitado por otra substancia de la misma naturaleza, lo cual debería también existir *necesariamente*, Prop. VII. Por lo tanto, habría dos substancias con el mismo atributo, lo cual es absurdo, Prop. V. La substancia, por consiguiente, es infinita.

En esta demostración la palabra "finita" se confunde con la expresión "finita en su género", Def. 2. Se asume de este modo que nada puede ser finito a menos que esté limitado por otra cosa del mismo género. Esto no es consistente con el sentido ordinario del término. El uso que hace Spinoza del término finito tiende a hacer del espacio la única forma de la substancia, y de todas las cosas existentes, nada más que afecciones del espacio, y pienso que esto es realmente uno de los últimos fundamentos de su sistema.

El primer escolio aplicado a la anterior Proposición es notable. Lo doy en palabras originales: "Quum finitum esse revera sit ex parte negatio, et finitum absoluta affirmatio existentiae alicujus naturae, sequitur ergo ex sola Prop. VII omnem substantiam debere esse infinitam". Ahora bien, esto es en realidad una afirmación del principio afirmado por Clarke, y controvertido por Butler (XIII. 11) de que la existencia necesaria implica la existencia en todas las partes del espacio. Probablemente este principio subyacerá en las bases de cualquier intento de demostrar, *a priori*, la existencia de una Ser Infinito.

A partir de las propiedades generales de la substancia establecidas arriba y la definición de Dios como la substancia que consta de atributos infinitos, se siguen necesariamente las particulares doctrinas de Spinoza relativas a la Naturaleza Divina. Puesto que la substancia es auto–existente, libre, causal por su propia naturaleza, la cosa en la que están las demás cosas, y por la que son concebidas, las mismas propiedades se afirman también de la Deidad. Es auto–existente, Prop. XI; indivisible, Prop. XIII; la única substancia, Prop. XIV; el Ser en el que son todas las cosas, y por el cual son todas concebidas, Prop. XV; libre, Prop. XVII; la causa inmanente de todas las cosas, Prop. XVIII. La prueba de que Dios es la única substancia se extrae de la Def. VI, que se interpreta en una declaración como que "Dios es el Ser absolutamente infinito, del que no se puede negar ningún atributo que exprese la esencia de la substancia". Asignándose así por definición a El todo atributo concebible y habiéndose determinado en la Prop. V que no pueden existir dos substancias del mismo atributo, se sigue que Dios es la única substancia.

Aunque la Etica de Spinoza, como una gran parte de sus otros escritos, se presenta bajo una forma geométrica, no puede proporcionar una buena práxis para el método simbólico de esta obra. Por supuesto, cada cadena de razonamiento, cuando sus premisas últimas están verdaderamente determinadas, admite ser tratada por este método; pero en el caso presente tal tratamiento difiere escasamente, excepto en el uso de letras para las palabras, de los procesos empleados en las demostraciones originales. No se encuentra uno a menudo con un razonamiento que consista en su mayor parte en un juego con los términos definidos como equivalentes; y es más por el interés que posee el tema que por los méritos de las demostraciones, estimadas como son en mucho por algunos, por lo que he dedicado unas pocas páginas aquí a su exposición.

19. No es posible, pienso, salir de una lectura de los argumentos de Clarke y Spinoza sin una profunda convicción de la futilidad de todos los intentos de establecer enteramente *a priori* la existencia de un Ser Infinito, sus atributos y su relación con el universo. El principio fundamental de tales especulaciones, a saber, que todo lo que se concibe con claridad debe existir, fracasa en el cumplimiento de su fin, incluso cuando se admite su verdad. Porque ¿Cómo lo finito comprenderá lo infinito?. Puede aún concederse la posibilidad de tal concepción, y en algún sentido más que en el de mera renuncia de los límites de la existencia fenoménica, antes de que pueda ser establecido para el conocimiento ningún fundamento sólido, *a priori*, de las cosas infinitas y eternas. La afirmación de Spinoza de la realidad de tal conocimiento es clara y explícita: "Mens humana adaequatum habet cognitionem aeternae et infinitae essentiae Dei" (Prop. XLVII, Parte Segunda).

Compararemos esto con la Prop. XXXIV. parte segunda: "Omnis idea quae in nobis est absoluta sive adaequata et perfecta, vera est" y con el axioma VI, parte primera: "Idea vera debet cum suo ideato convenire".

Más aún, esta especie de conocimiento se constituye en el constituyente esencial de todo otro conocimiento: "De natura rationis est res sub quadan aeternitatis specie percipere" (Prop. XLIV, cor. II parte segunda).

Si se dijera que hay una tendencia en la mente humana a elevarse de la contemplación de lo particular hacia lo universal, de lo finito hacia lo infinito, de lo pasajero hacia lo eterno; y que esta tendencia nos sugiere, muy probablemente, la existencia de más de lo que los sentidos perciben o el entendimiento comprende, la afirmación podría aceptarse como verdadera por lo menos para un gran número de mentes. Existe, sin embargo, una clase de especulaciones cuyo carácter debe explicarse en parte por referencia a otras causas.-La impaciencia del conocimiento probable o limitado, tan a menudo lo único que nos es asequible; un deseo de certeza absoluta donde indicios suficientes para señalarnos el camino del deber, mas no para satisfacer las demandas del entendimiento especulativo, son lo único que se nos ha concedido; quizás también la insatisfacción con el estado de cosas actual. Debido al predominio indebido de estos motivos se prescinde del procedimiento más sobrio de la analogía y la inducción probable. No obstante, la última es indu-

dablemente el camino más adaptado a nuestra condición presente. Inferir la existencia de una causa inteligente a partir de las abundantes evidencias de la finalidad circundante, elevarse a la concepción de un Gobernador moral del mundo a partir del estudio de la constitución y las dotes morales de nuestra propia naturaleza, aunque tan sólo son los débiles pasos de un entendimiento limitado en sus facultades y sus materiales de conocimiento, son más valiosos que la pretensión ambiciosa de llegar a una certeza inalcanzable en el ámbito de la religión natural. Y así como fueron los más antiguos, son todavía los más sólidos fundamentos, dejando a un lado la Revelación, de la creencia de que el curso de este mundo no se halla abandonado al azar y al destino inexorable.

REFERENCIAS

(10) Metafísica, III, 4; Anal. Post. I, 19 y SS.

(11) Et. Nic., Libro I, capítulo II.

CAPITULO XIV

EJEMPLO DEL ANALISIS DE UN SISTEMA DE ECUACIONES POR EL METODO DE REDUCCION A UNA UNICA ECUACION EQUIVALENTE V = 0 EN QUE V SATISFACE LA CONDICION V(1 − V) = 0

Tomemos el notable sistema de premisas empleado en el capítulo anterior para probar que "La materia no es un ser necesario", y suprimiendo la sexta premisa, a saber, el movimiento existe, examinemos alguna de las consecuencias que se siguen de las premisas restantes. Esto es en realidad aceptar como verdaderos los principios hipotéticos del Dr. Clarke, mas suponernos ignorantes del hecho de la existencia del movimiento. Pueden ocurrir casos en que tal selección de una parte de las premisas de un argumento puede llevar a consecuencias interesantes, aunque el ejemplo presente se ha retomado con otros fines. Las premisas efectivamente empleadas serán

1. Si la materia es un ser necesario, o la propiedad de la gravitación se halla presente necesariamente o necesariamente ausente.

2. Si la gravitación se halla necesariamente ausente y el mundo no está sometido a ninguna inteligencia que lo presida, el movimiento no existe.

3. Si la gravitación se halla necesariamente presente es necesario un vacío.

4. Si un vacío es necesario, la materia no es un ser necesario.

5. Si la materia es un ser necesario, el mundo no está sujeto a una inteligencia que lo presida.

Si, como antes, representamos las proposiciones elementales mediante la notación siguiente, a saber:

x = la materia es un ser necesario.
y = la gravitación se halla necesariamente presente.
w = el movimiento existe.
t = la gravitación se halla necesariamente ausente.
z = el mundo es meramente material, y no se halla sometido a una inteligencia que lo presida.
v = es necesario un vacío.

Obtendremos al expresar las premisas y al eliminar los símbolos de clase indefinida (q) el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} xyt + x\bar{y}\bar{t} &= 0, \\ tzw &= 0, \\ y\bar{v} &= 0, \\ vx &= 0, \\ x\bar{z} &= 0; \end{aligned}$$

en el que, en aras a la brevedad, $\bar{y}$ representa 1–y, $\bar{t}$ 1– t, y así sucesivamente, de donde, por tanto, $1 - t = t$, $1 - \bar{y} = y$, etc.

Como los primeros miembros de estas ecuaciones contienen tan sólo términos positivos, podemos formar una única ecuación sumándolos entre sí (VIII. Prop.2), a saber:

$$xyt + x\bar{y}\bar{t} + y\bar{v} + vx + x\bar{z} + tzw = 0,$$

y resta reducir el primer miembro hasta hacer que satisfaga la condición $V(1 - V) = 0$.

A este fin obtendremos primero su desarrollo con referencia a los símbolos x e y. El resultado es

$$\begin{aligned} &(t + \bar{v} + v + \bar{z} + tzw)\, xy + (\bar{t} + v + \bar{z} + tzw)\, x\bar{y} \\ &\quad + (\bar{v} + tzw)\, \bar{x}y + tzw\bar{x}\bar{y} = 0. \end{aligned}$$

y nuestra meta se habrá conseguido al reducir los cuatro coeficientes del desarrollo a formas equivalentes que satisfagan la condición requerida.

Ahora bien, el primer coeficiente es, dado que $v + \bar{v} = 1$,

$$1 + t + \bar{z} + tzw,$$

que se reduce a la unidad (IX. Prop. 1).

El segundo coeficiente es

$$\bar{t} + v + \bar{z} + tzw;$$

y su forma reducida (X.3) es

$$\bar{t} + tv + t\bar{v}\bar{z} + t\bar{v}zw.$$

El tercer coeficiente $\bar{v} + tzw$, se reduce por el mismo método a $\bar{v} + tzwv$, y el último coeficiente tzw no ha menester de reducción. De aquí que el desarrollo resulte

$$xy + (\bar{t} + tv + t\bar{v}\bar{z} + t\bar{v}zw)\, x\bar{y} + (\bar{v} + tzwv)\, \bar{x}y + tzw\bar{x}\bar{y} = 0; \quad (1)$$

y esta es la forma buscada de reducción.

2. Ahora bien, de acuerdo con el principio establecido en Prop. III, Cap. X, toda la relación que conecte cualquier conjunto particular de los símbolos en la

ecuación anterior puede deducirse desarrollando aquella ecuación con referencia a los símbolos particulares en cuestión y reteniendo en el resultado sólo aquellos constituyentes cuyos coeficientes son la unidad. Así, si x e y son los símbolos escogidos, somos llevados de un modo inmediato a la ecuación

$$xy = 0,$$

de donde tenemos

$$y = \frac{0}{0}(1 - x),$$

con la siguiente interpretación: *Si la gravitación se halla presente necesariamente, la materia no es un ser necesario.*

Busquemos a continuación la relación entre x y w. Desarrollando (1) con respecto a aquellos símbolos, obtenemos

$$(y + \bar{t}\bar{y} + tv\bar{y} + t\bar{v}z\bar{y} + t\bar{v}\bar{z}\bar{y})\, xw + (y + \bar{t}\bar{y} + tv\bar{y} + t\bar{v}\bar{z}\bar{y})\, x\bar{w} + (\bar{v}y + tzvy + tz\bar{y})\, \bar{x}w + \bar{v}y\bar{x}\bar{w} = 0.$$

El coeficiente de xw, y sólo él, se reduce a la unidad. Pues

$$t\bar{v}z\bar{y} + t\bar{v}\bar{z}\bar{y} = t\bar{v}\bar{y}, \text{ y } tv\bar{y} + t\bar{v}\bar{y} = t\bar{y}, \text{ y } \bar{t}\bar{y} + t\bar{y} = \bar{y}, \text{ y por último } y + \bar{y} = 1.$$

Este es siempre el modo en que tales reducciones ocurren. De ahí obtenemos

$$xw = 0,$$

$$\therefore w = \frac{0}{0}(1 - x),$$

Cuya interpretación es, *si el movimiento existe, la materia no es un ser necesario.*

Si, de modo parejo, desarrollamos la ecuación (1) con respecto a x y z obtenemos

$$x\bar{z} = 0,$$

$$\therefore x = \frac{0}{0}z,$$

con la siguiente interpretación: "*Si la materia es un ser necesario el mundo es meramente material y no lo preside una inteligencia*".

Esta es, ciertamente, tan sólo la quinta premisa reproducida, pero muestra que no hay otra relación que conecte los dos elementos que contiene.

Si buscamos toda la relación que conecta los elementos x, w e y, hallamos, al desarrollar (1) con referencia a aquellos símbolos, y procediendo como antes

$$xy + xw\bar{y} = 0.$$

Supóngase que se pide determinar las consecuencias de la hipótesis "El movimiento no existe", en relación a las cuestiones sobre la necesidad de la materia y la presencia necesaria de la gravitación. Hallamos

$$w = \frac{-xy}{x\bar{y}},$$

$$\therefore 1 - w = \frac{x}{x\bar{y}} = \frac{1}{0}\,xy + x\bar{y} + \frac{0}{0}\,\bar{x};$$

ó

$$1 - w = x\bar{y} + \frac{0}{0}\,\bar{x}, \quad \text{con} \quad xy = 0.$$

La interpretación directa de la primera ecuación es: *Si el movimiento no existe, o la materia es un ser necesario y la gravitación no se halla necesariamente presente, o la materia no es un ser necesario.*

La interpretación inversa es: *Si la materia es un ser necesario y la gravitación no es necesaria, no existe el movimiento.*

Del mismo modo, si buscásemos la relación completa entre x, z y w, hallaríamos

$$xzw + x\bar{z} = 0.$$

De donde podemos deducir

$$z = x\bar{w} + \frac{0}{0}\,\bar{x}, \quad \text{con} \quad xw = 0.$$

Por tanto, *Si el mundo es meramente material y no está sometido a una inteligencia que lo presida, o la materia es un ser necesario y el movimiento no existe, o la materia no es un ser necesario.*

Asimismo, *inversamente, si la materia es un ser necesario y no existe el movimiento, el mundo es meramente material.*

3. Podríamos, por supuesto, extender el mismo método para la determinación de las consecuencias de cualquier hipótesis compleja u, tal como "el mundo es meramente material y no lo preside una inteligencia (z), pero el movimiento existe (w)" con referencia a cualesquiera otros elementos de duda o especulación contenidos en las premisas originales, tales como "la materia es un ser necesario (x)", "La gravitación es una cualidad necesaria de la materia (y)". A este fin conectaríamos a la ecuación general (1) una nueva ecuación

$$u = wz,$$

reduciríamos el sistema así formado a una única ecuación $V = 0$ en que V satisface la condición $V(1-V) = 0$ y procederíamos como antes a la determinación de la relación entre u, x e y, y, finalmente, u como función desarrollada de x e y. Pero es mucho mejor adoptar los métodos de los capítulos VIII y IX. Indicaré aquí sóla-

mente algunos resultados junto con los pasos decisivos de su deducción y dejaré su verificación a la elección del lector.

En el último problema mencionado encontramos como relación que conecta a x, y, w y z

$$xw + x\bar{w}y + x\bar{w}\bar{y}\bar{z} = 0.$$

Y si escribimos $u = xy$ y eliminamos a continuación los símbolos x e y por el problema general Cap. IX, hallamos

de donde

$$xu + xy\bar{u} = 0,$$

$$u = \frac{1}{0}xy + 0x\bar{y} + \frac{0}{0}\bar{x};$$

por lo tanto

$$wz = \frac{0}{0}\bar{x} \quad \text{con} \quad xy = 0.$$

De aquí que *Si el mundo es meramente material y no lo preside una inteligencia, y existe a un tiempo el movimiento, la materia no es un ser necesario.*

Ahora bien, se ha mostrado antes que *si el movimiento existe, la materia no es un ser necesario*, de tal modo que la conclusión anterior nos dice aún menos de lo que habíamos averiguado antes (inferencialmente) que era verdadero. Sin embargo, aquella conclusión es la respuesta adecuada y completa a la preguna propuesta, que consistía simplemente en determinar las consecuencias de una cierta hipótesis compleja.

4. Sería así fácil, incluso a partir del sistema limitado de premisas que tenemos delante, deducir una gran variedad de inferencias adicionales que contuvieran, en las condiciones que se dan, cualesquiera combinaciones propuestas de las proposiciones elementales. Si la condicion es inconsistente con las premisas se indicará el hecho mediante la forma de la solución. El valor que el método asignará a la combinación de símbolos expresiva de la condición propuesta será 0. Si, por otra parte, el cumplimiento de la condición en cuestión no impone restricción alguna a las proposiciones entre las que se busca la relación, de tal modo que toda combinación de aquellas proposiciones sea igualmente posible —se indicará el hecho asimismo mediante la forma de la solución. Se exponen a continuación ejemplos de estos casos.

Si del modo habitual buscamos las consecuencias que se seguirían de la condición de que *La materia es un ser necesario*, y a un tiempo de que *el movimiento existe*, en tanto afecta a las proposiciones, *el mundo es meramente material* y *no lo preside una inteligencia*, y *la gravitación se halla necesariamente presente*, obtendremos la ecuación

$$xw = 0,$$

que indica que la condición propuesta es inconsistente con las premisas y no puede, por lo tanto, cumplirse.

Si buscamos las consecuencias que se seguirían a partir de la condición de que *la materia no es un ser necesario*, y a un tiempo de *el movimiento existe*, con referencia a los mismos elementos que antes, a saber, *la ausencia de una inteligencia que presida*, y la *necesidad de la gravitación*, —obtenemos el siguiente resultado

$$(1 - x)\, w = \frac{0}{0} yz + \frac{0}{0} y\,(1 - z) + \frac{0}{0}\,(1 - y)\, z + \frac{0}{0}\,(1 - y)\,(1 - z),$$

que podría interpretarse literalmente como sigue:

Si la materia no es un ser necesario y existe el movimiento, entonces o el mundo es meramente material y no lo preside una inteligencia, y la gravitación es necesaria, o uno de estos dos resultados se sigue sin el otro, o ambos no son verdaderos. Por tanto, de las cuatro combinaciones posibles, de las que una es necesariamente verdadera, y de las que necesariamente sólo una puede ser verdadera, se afirma que cualquiera puede ser verdadera. Tal resultado es un truismo —una mera verdad *necesaria*. No obstante, contiene la única respuesta que puede darse a la cuestión propuesta.

No estimo necesario defender estas aplicaciones del cargo de fútil laboriosidad. Puede ser necesario entrar con alguna amplitud en detalles inútiles en sí mismos, a fin de asegurar la confianza en los principios y los métodos generales. Cuando se haya logrado esta meta en el tema de esta investigación, olvídese todo lo que, hallándose más tarde superfluo, ha contribuido a su consecución.

CAPITULO XV

LA LOGICA ARISTOTELICA Y SUS AMPLIACIONES MODERNAS, EXAMINADAS POR EL METODO DE ESTE TRABAJO

1. El sistema lógico de Aristóteles, modificado en sus detalles, mas inalterado en sus características esenciales, ocupa un lugar tan importante en la educación académica que parece oportuno conceder en el presente tratado alguna consideración a su naturaleza y alguna breve discusión de los problemas centrales que presenta. Confío en no acercarme a esta tarea con un espíritu estrecho o ásperamente crítico. Mi propósito no es, ciertamente, establecer comparación alguna entre el venerable sistema escolástico y el del tratado presente; sino, poniendo a la verdad por encima de toda otra consideración, intentar mostrar la naturaleza real de la antigua doctrina y hacer desaparecer uno o dos errores en lo atañedero a su alcance y suficiencia.

Lo que puede tenerse por esencial en el espíritu y los procedimientos del sistema aristotélico y todos los restantes sistemas lógicos afines, es el ensayo de clasificación de las formas permisibles de inferencia, y la referencia precisa de aquellas formas, colectiva o individualmente, a algún principio general de naturaleza axiomática, tal como "el dictum de Aristóteles": todo lo que se afirma o niega del género puede en igual sentido afirmarse o negarse de cualquier especie contenida en ese género. En lo referente a tales principios generales puede, pienso, observarse, que o exponen directamente, aunque de manera abstracta, el argumento que se supone han de explicar, y al exponer así ese argumento, afirman su validez, o contienen en su expresión términos que, tras ser definidos, nos llevan de nuevo al mismo punto, a saber, la exposición abstracta de las supuestas formas permisibles de inferencia. La idea de clasificación impregna así a aquellos sistemas. Además, muestran la Lógica como descomponible en dos grandes ramas, una de las cuales se ocupa del tratamiento de las proposiciones categóricas, ocupándose la otra de las proposiciones hipotéticas o condicionales. La distinción es casi idéntica a la establecida entre proposiciones primarias y secundarias en la obra presente. La consideración de la teoría de las proposiciones categóricas es mucho más elaborada y completa en los tratados ordinarios de Lógica que la de las hipotéticas, y se ocupa en parte de antiguas distinciones escolásticas y en parte de los cánones de la inferencia deductiva. En nuestro caso sólo es necesario dirigir la atención a la última aplicación.

2. Las proposiciones categóricas se clasifican según esta cuádruple división:

PRIMERO.– Proposiciones universales afirmativas: Todos los Y son X.
SEGUNDO.– Proposiciones universales negativas: Ningún Y es X.
TERCERO.– Proposiciones particulares afirmativas: Algunos Y son X.
CUARTO.– Proposiciones particulares negativas: Algunos Y no son X.

A estas formas se les han añadido recientemente otras cuatro, constituyendo de este modo ocho en total (ver el artículo siguiente), susceptibles, sin embargo, de reducción a seis, y sometidas a relaciones que han sido consideradas con gran amplitud y talento por el profesor De Morgan en su Lógica Formal. Un esquema en alguna medida diferente del anterior ha sido dado al mundo por Sir W. Hamilton, haciéndose del mismo la base de un método de inferencia silogística del que se habla con gran respeto por autoridades en Lógica. (12)

Los procesos de la Lógica Formal, se describen en relación con el sistema anterior de proposiciones, como de dos tipos, a saber, "Conversión" y "Silogismo". Se entiende por Conversión la expresión de cualquier proposición del tipo anterior en una forma equivalente pero con un orden inverso en los términos. Por Silogismo se entiende la deducción a partir de dos premisas tales que posean un término común, ya sea sujeto o predicado, de una tercera proposición inferencialmente contenida en las dos, que forma la "conclusión". Se mantiene por la mayor parte de los autores que tratan de Lógica que estos procesos, y según algunos, sólo el proceso silogístico, proporcionan los tipos universales de razonamiento, y que la faena de la mente consiste en conformarse en cualquier proceso demostrativo, ya sea consciente o inconscientemente, a los modelos particulares de los procesos que han ido clasificados en los escritos de los lógicos.

3. El camino que pretendo seguir consiste en mostrar cómo estos procesos del Silogismo y la Conversión pueden llevarse a cabo del modo más general sobre la base de los principios del presente tratado, y, considerados así en relación a un sistema de Lógica, cuyos fundamentos, se piensa, se han puesto en las leyes últimas del pensamiento, buscar determinar su lugar auténtico y su carácter esencial.

Las expresiones de los ocho tipos fundamentales de proposición en el lenguaje de los símbolos son como sigue:

1. Todos los Y son X.	$y = vx.$	
2. Ningún Y es X.	$y = v(1 - x).$	
3. Algunos Y son X.	$vy = vx.$	
4. Algunos Y son no–X.	$vy = v(1 - x).$	
5. Todos los no–Y son X.	$1 - y = vx.$	(1)
6. Ningún no–Y es X.	$1 - y = v(1 - x).$	
7. Algunos no–Y son X.	$v(1 - y) = vx.$	
8. Algunos no–Y son no–X.	$v(1 - y) = v(1 - x).$	

Al referirse a estas formas será conveniente aplicar, en un sentido que se explicará enseguida, los epítetos de cantidad lógica "universal" y "particular", y de cualidad "afirmativo" y "negativo", a los términos de las proposiciones y no a éstas. Consideraremos así el término "Todos los Y" como universal–afirmativo; el término "Y", o "Algunos Y" como particular–afirmativo; el término "Todos los no–Y", como universal–negativo; el término "Algunos no–Y" como particular–negativo. La expresión "Ningún Y" no es propiamente un *término* de una proposición, pues el verdadero significado de la proposición "Ningún Y es X" es "Todos los Y son no–X". El sujeto de esa proposición es, por tanto, universal–afirmativo, el predicado particular–negativo. Que se da una distinción real entre las concepciones de "Hombres " y "No–hombres" es palmario. Esta distinción es todo lo que tengo en cuenta cuando aplico como antes las designaciones de afirmativo y negativo, sin insistir, sin embargo, en la corrección etimológica de la aplicación a los términos de las proposiciones. Las denominaciones positivo y privativo habrían sido más adecuadas, mas el primero de dichos términos se emplea ya con un sentido fijo en otras partes de esta obra.

4. A partir de las formas simbólicas dadas arriba se siguen inmediatamente las leyes de la conversión. Así, de la ecuación

$$y = vx,$$

que representa la proposición "Todos los Y son X" deducimos, eliminando v

$$y(1 - x) = 0,$$

que da al solucionarse con referencia a $1 - x$

$$1 - x = \frac{0}{0}(1 - y);$$

cuya interpretación es

Todos los no–X son no–Y.

Esto es un ejemplo de lo que se llama "conversión negativa". De modo parejo, la ecuación

$$y = v(1 - x),$$

que representa la proposición "Ningún Y es X" da

$$x = \frac{0}{0}(1 - y),$$

cuya interpretación es "Ningún X es Y". Esto es un ejemplo de lo que se denomina "conversión simple", aunque es en realidad del mismo tipo que la conversión mostrada en el ejemplo anterior. Todos los ejemplos de conversión de que se han apercibido los lógicos son o del tipo anterior, o del que consiste en la mera transposición de los términos de una proposición, sin alterar su cualidad, como cuando cambiamos.

$$vy = vx, \qquad \text{que representa "Algunos } Y \text{ son } X\text{"}$$

por

$$vx = vy, \qquad \text{que representa "Algunos } X \text{ son } Y\text{"};$$

o contienen una combinación de aquellos procesos con algún proceso auxiliar de limitación, como cuando de la ecuación

$$y = vx, \qquad \text{que representa "Todos los } Y \text{ son } X\text{"}$$

deducimos al multiplicar por v

$$vy = vx, \qquad \text{que representa "Algunos } Y \text{ son } X\text{"},$$

y de aquí

$$vx = vy, \qquad \text{que representa "Algunos } X \text{ son } Y\text{"}.$$

En este ejemplo el proceso de limitación precede al de transposición.

A partir de estos casos se ve que la conversión es una aplicación particular de un proceso mucho más general en Lógica, del que se han dado muchos ejemplos en esta obra. Ese proceso tiene por objeto la determinación de cualquier elemento en cualquier proposición, por compleja que sea, como función lógica de los elementos restantes. En vez de limitar nuestra atención al sujeto y al predicado, considerados como simples términos, podemos tomar cualquier elemento o cualquier combinación de elementos que entren en alguno de ellos; hacer de ese elemento, o de esa combinación el "sujeto" de una nueva proposición, y determinar cual será su predicado de acuerdo con los datos que se nos han suministrado. Puede observarse, que incluso las formas simples de proposiciones enumeradas arriba proporcionan algún fundamento para la aplicación de tal método, más allá de los que las leyes aceptadas de la conversión parecen reconocer. Así, la ecuación

$$y = vx, \qquad \text{que representa "Todos los } Y \text{ son } X\text{"},$$

nos da, además de la proposición arriba deducida, las tres siguientes:

PRIMERO.— $y(1-x) = 0$. No existen Y que no sean X.

SEGUNDO.— $1 - y = \frac{0}{0}x + (1-x)$. Las cosas que son no–$Y$ contienen todas las cosas que son no–X, y un resto indefinido de cosas que son X.

TERCERO.— $x = y + \frac{0}{0}(1-y)$. Las cosas que son X contienen a todas las cosas que son Y y a un resto indefinido de cosas que son no–Y.

Estas conclusiones, ciertamente, sólamente dan forma distinta, aunque equiva-

lente a la proposición dada –pero éste y no otro es el oficio del modo aceptado de "la conversión negativa".

Además, estos procesos de conversión no son elementales, sino que son combinaciones de procesos más simples, más dependientes de un modo inmediato de las leyes últimas y los axiomas que gobiernan el uso del instrumento simbólico del razonamiento. Esta observación es aplicable igualmente al caso del Silogismo, que consideramos a continuación.

5. La naturaleza del silogismo se ve mejor en el caso particular. Supóngase que tenemos las proposiciones,

Todos los X son Y.
Todos los Y son Z.

De ellas podemos deducir la conclusión,

Todos los X son Z.

Esto es una inferencia silogística. Los términos X y Z se llaman extremos, e Y se llama término medio. La función del silogismo puede definirse de un modo general ahora. Dadas dos proposiciones del tipo cuyas especies se hallan expuestas en tablas en (1), y que contengan un término medio o común Y, conectado en una de las proposiciones con un extremo X, y en la otra con un extremo Z, se requiere la relación que conecta los extremos X y Z. El término Y puede aparecer en forma afirmativa, como Todos los Y, Algunos Y; o en forma negativa, como, Todos los no–Y, Algunos no–Y; en cualquier proposición sin tener en cuenta la forma particular que asume en la otra.

Nada es más fácil que resolver el Silogismo en casos particulares por el método de este tratado. Su solución es, ciertamente, una aplicación particular del proceso de reducción de sistemas de proposiciones. Tomando los ejemplos dados arriba tenemos

$$x = vy,$$
$$y = v'z;$$

de donde por sustitución

$$x = vv'z,$$

que se interpreta

Todos los X son Z.

o, procediendo en concordancia rigurosa con el método desarrollado en (VIII.7), deducimos

$$x(1 - y) = 0, \qquad y(1 - z) = 0.$$

Sumando estas ecuaciones, y eliminando y, tenemos

$$x(1 - z) = 0;$$

de donde, $x = \frac{0}{0} z$, o, Todos los X son Z.

Y de modo parejo puede tratarse cualquier otro caso.

6. Dejando, sin embargo, la consideración de los ejemplos especiales, examinemos las formas generales a las que todo silogismo puede reducirse.

PROPOSICION I

Para deducir las reglas generales del Silogismo.

Por reglas generales del Silogismo entiendo aquí las reglas aplicables a premisas que admitan toda variedad en lo referente tanto a la cantidad como a la cualidad en sus sujetos y predicados, excepto la combinación de dos términos universales en la misma proposición. Las formas admisibles de proposiciones son, por tanto, aquellas de las que se da una visión tabular en (1).

Sean X e Y los elementos o cosas que entran en la primera premisa, y Z e Y los contenidos en la segunda. Se presentarán dos casos fundamentalmente diferentes en carácter. Los términos que contiene a Y serán o de *cualidad igual o desigual*, siendo considerados como de igual cualidad cuando ambos hablan de los Y o ambos de los no–Y, y de cualidad desigual cuando uno de ellos habla de "los Y", y el otro de "los no–Y". Cualquier par de premisas en que se satisfaga la condición anterior puede representarse por las ecuaciones

$$vx = v'y, \qquad (1)$$

$$wz = w'y; \qquad (2)$$

pues podemos emplear el símbolo y para representar o "Todos los Y", o "Todos los no–Y", pues la interpretación del símbolo es puramente convencional. Si empleamos y en el sentido de "Todos los no–Y", entonces $1 - y$ representará "Todos los Y", y no se introducirá ningún otro cambio. Una libertad pareja es permisible con respecto a los símbolos x y z, de tal modo que las ecuaciones (1) y (2) pueden, al asignarles las interpretaciones de x, y y z hacerse representantes de todas las variedades en la combinación de las premisas dependientes de la *cualidad* de los términos respectivos. Además, asignando interpretaciones adecuadas a los símbolos v, v', w, w', en aquellas ecuaciones pueden también representarse todas las variedades con respecto a la *cantidad*. Así, si tomamos $v = 1$, y representamos por v' una clase indefinida, la ecuación (1) representará una proposición universal de acuerdo con el sentido ordinario de ese término, esto es, una proposición con sujeto universal y predicado particular. Podemos, de hecho, dar al sujeto y al predicado en cualquier premisa cualesquiera *cantidades* (usando este término en el sentido escolástico) que deseemos, exceptuando el que, por hipótesis, no deben ser ambas universales.

El sistema (1), (2), representa, por tanto, con perfecta generalidad las combinaciones posibles de premisas que tienen términos medios iguales.

7. Para que nuestro análisis pueda ser tan general como las situaciones a las que se aplica, eliminemos, mediante el método de esta obra y de (1) y (2), y busquemos las expresiones de x, $1 - x$, y vx en términos de z y de los símbolos v, v', w, w'. Las anteriores contendrán todas las formas posibles del sujeto de la conclusión. La forma v(1 − x) se excluye, en la medida en que no podemos, a partir de la interpretación $vx =$. Algunos X, dada en las premisas, interpretar v(1 − x) como Algunos no–X. El símbolo v, cuando se usa en el sentido de "algunos", se aplica sólo a aquel término al que se halla conectado en las premisas.

Los resultados del análisis son como sigue:

$$x = [vv'ww' + \frac{0}{0}\{vv'(1-w)(1-w') + ww'(1-v)(1-v') + (1-v)(1-w)\}]z + \frac{0}{0}\{vv'(1-w') + 1 - v\}(1-z), \qquad \text{(I.)}$$

$$1 - x = [v(1-v')\{ww' + (1-w)(1-w')\} + v(1-w)w' + \frac{0}{0}\{vv'(1-w)(1-w') + ww'(1-v)(1-v') + (1-v)(1-w)\}]z + [v(1-w)w' + \frac{0}{0}\{vv'(1-w') + 1 - v\}](1-z), \qquad \text{(II.)}$$

$$vx = \{vv'ww' + \frac{0}{0}vv'(1-w)(1-w')\}z + \frac{0}{0}(1-w')(1-z). \qquad \text{(III.)}$$

Cada una de estas expresiones contiene en su segundo miembro dos términos, de uno de los cuales es z un factor, siéndolo del otro $1 - z$. Pero la inferencia silogística no admite, por cuestión de forma, clases contrarias en su conclusión, como Z y no–Z juntas. Debemos, por tanto, a fin de determinar las reglas de aquella especie de inferencia, averiguar bajo qué condiciones los segundos miembros de cualquiera de nuestras ecuaciones son reducibles a un término único.

La forma más simple es (III),que es reducible a un término único si $w' = 1$. La ecuación se convierte, pues, en

$$vx = vv'wz, \qquad (3)$$

el primer miembro es idéntico al extremo de la primera premisa; el segundo es de la misma cantidad y cualidad que el extremo de la segunda premisa. Puesto que, dado que $v = 1$, el segundo miembro de (2), que contiene al término medio y, es universal; por tanto, merced a la hipótesis el primer miembro es particular, y por tanto, el segundo miembro de (3), que contiene el mismo símbolo w en su coeficiente, es también particular. De aquí deducimos la siguiente ley.

CONDICION DE INFERENCIA.– Un término medio, por lo menos, ha de ser universal.

REGLA DE INFERENCIA.– Igualar los extremos.

A partir de un análisis de las ecuaciones (I) y (II), se hará, además, manifiesto, que la anterior es la única condición de la inferencia silogística cuando los términos medios son de igual cualidad. Así, el segundo miembro de (I), se reduce a un único término, si $w' = 1$ y $v = 1$ y el segundo miembro de (II) se reduce a un término único si $w' = 1$, $v = 1$, $w = 1$. En cada uno de estos casos es necesario que $w' = 1$, única condición suficiente antes establecida.

Considérese, en segundo lugar, el caso en que los términos medios sean de distinta cualidad. Las premisas pueden representarse entonces de las formas

$$vx = v'y, \tag{4}$$

$$wz = w'(1 - y); \tag{5}$$

y si, como antes, eliminamos y, y determinamos las expresiones de x, $1 - x$, y vx, obtenemos

$$x = [vv'(1-w)w' + \frac{0}{0}\{ww'(1-v) + (1-v)(1-v')(1-w) + v'(1-w)(1-w')\}]z + [vv'w' + \frac{0}{0}\{(1-v)(1-v') + v'(1-w')\}](1-z). \quad \text{(IV.)}$$

$$1 - x = [ww'v + v(1-v')(1-w) + \frac{0}{0}\{ww'(1-v) + (1-v)(1-v')(1-w) + v'(1-w)(1-w')\}]z + [v(1-v') + \frac{0}{0}\{v'(1-w') + (1-v)(1-v')\}](1-z). \quad \text{(V.)}$$

$$vx = \{vv'(1-w)w' + \frac{0}{0}vv'(1-w)(1-w')\}z + \{vv'w' + \frac{0}{0}vv'(1-w')\}(1-z). \quad \text{(VI.)}$$

Ahora bien, el segundo miembro de (VI) se reduce a un término único en relación a z, si $w = 1$, dado

$$vx = \{vv'w' + \frac{0}{0}vv'(1-w')\}(1-z);$$

cuyo segundo miembro es opuesto, tanto en cantidad como en cualidad, al extremo correspondiente, wz, en la segunda premisa. Pues dado que $w = 1$, wz es universal. Pero el factor vv indica que el término al que se conecta es particular, pues por la

hipótesis v y v no son las dos igual a 1. De aquí deducimos la siguiente ley de inferencia en el caso de términos medios iguales:

PRIMERA CONDICION DE INFERENCIA.– *Por lo menos, un extremo universal.*

REGLA DE INFERENCIA.– *Cambiar la cantidad y la cualidad de ese extremo, e igualar el resultado al otro extremo.*

Además, el segundo miembro de (V) se reduce a un único término si $v' = 1$, $w' = 1$; y da entonces

$$1 - x = \{vw + \frac{0}{0}(1 - v)\, w\}\, z.$$

Ahora bien, dado que $v' = 1$, $w' = 1$, los términos medios de las premisas son ambos universales, y por tanto los extremos vx, wz, son particulares. Pero en la conclusión el extremo que contiene a x es opuesto, tanto en la cantidad como en la cualidad, al extremo vx en la primera premisa, mientras el extremo que contiene a z concuerda tanto en cantidad como en cualidad con el extremo correspondiente wz en la segunda premisa. De aquí la siguiente Ley general:

SEGUNDA CONDICION DE INFERENCIA.– *Dos términos medios universales.*

REGLA DE INFERENCIA.– *Cambiar la cantidad y la cualidad de cualquier extremo e igualar el resultado al otro extremo inalterado.*

No hay en el caso de términos medios desiguales otras condiciones o reglas de inferencia silogística que las anteriores. Así, la ecuación (IV), aunque reducible a la forma de una conclusión silogística, cuando $w = 1$, y $v = 1$, no establece por ello una nueva condición de inferencia, dado que, por lo que precede, la condición única $v = 1$, o w ¿ 1, bastaría.

8. Los siguientes ejemplos ilustrarán suficientemente las reglas generales del silogismo dadas arriba:

1. Todos los Y son X.
Todos los Z son Y.

Esto corresponde al caso 1. Todos los Y es el término medio universal.

Los extremos igualados dan como conclusión

Todos los Z son X.

siendo el término universal, Todos los Z, el sujeto; y el término particular (algunos) X, el predicado.

2. Todos los X son Y.
Ningún Z es Y.

La expresión adecuada de estas premisas es

Todos los X son Y.
Todos los Z son no–Y.

Pertenecen al caso 2, y satisfacen la primera condición de inferencia. El término medio Y es particular–afirmativo; en la primera premisa; el de la segunda premisa, no–Y, particular–negativo. Si tomamos todos los Z como el extremo universal, y cambiamos su cantidad y cualidad de acuerdo con la regla, obtenemos el término Algunos no–Z, y éste igualado al otro extremo, Todos los X, da

Todos los X son no–Z, esto es, Ningún X es Z.

Si comenzamos con el otro extremo universal, y procedemos de un modo similar, obtenemos el resultado equivalente Ningún Z es X.

3. Todos los Y son X.
Todos los no–Y son Z.

Aquí también los términos medios son desiguales en cualidad. Las premisas, por tanto, pertenecen al caso 2, y al haber dos términos medios universales, se satisface la segunda condición de inferencia. Si merced a la regla cambiamos la cantidad y la cualidad del primer extremo, (algunos) X, obtenemos Todos los no–X, que igualado con los otros extremos, da

Todos los no–X son Z.

El orden inverso de procedimiento daría el resultado equivalente

Todos los no–Z son X.

Las conclusiones de los dos últimos ejemplos no serían reconocidas como válidas en el sistema escolástico de la Lógica, que requiere virtualmente que el sujeto de una proposición sea afirmativo. Son, sin embargo, perfectamente legítimos, y las reglas merced a las que se determinan forman indudablemente los cánones más generales de la inferencia silogística. El proceso de investigación merced al que se deducen parecerá probablemente innecesariamente complejo, y es cierto que podrían haberse obtenido con mayor facilidad y sin la ayuda de ningún instrumento simbólico. Era mi objetivo, sin embargo, llevar a cabo la investigación del modo más general, y mediante un análisis completamente exhaustivo. Con este fin a la vista, la brevedad o prolijidad del método empleado es una cuestión indiferente. En verdad el análisis no es en rigor del silogismo, sino de una combinación mucho más general de proposiciones, pues nos es permitido atribuir a los símbolos v, v',w,w', cualesquiera interpretaciones de clase que deseemos. A fin de ilustrar esta observación, aplicaré la solución (I) al siguiente caso imaginario:

Supóngase que una cantidad de trozos de tela rayados con diferentes colores fueran sometidos a una inspección, y que se hicieran las dos siguientes observaciones a su respecto:

PRIMERO.– Que todo trozo rayado en blanco y verde estuviera también rayado en negro y amarillo, y *viceversa.*

SEGUNDO.– Que todo trozo rayado en rojo y naranja estuviera también rayado en azul y amarillo, y *viceversa.*

Supóngase a continuación que se nos pide determinar en qué relación se hallaban las piezas marcadas de verde con referencia a los colores blanco, negro, rojo, naranja y azul.

En este caso, si hacemos v = blanco, x = verde, v' = negro, y = amarillo, w = rojo, z = naranja, w' = azul, la expresión de nuestras premisas será

$$vx = v'y,$$
$$wz = w'y,$$

concordante con el sistema (1) (2). La ecuación (I) conduce, entonces a la siguiente conclusión:

Los trozos rayados de verde están o rayados de naranja, blanco, negro, rojo, y azul, a la vez, estando todos los trozos de tal carácter rayados de verde; o están rayados en naranja, blanco, negro, pero no en rojo o azul; o están rayados en naranja, rojo, y azul, mas no en blanco o negro; o están rayados en naranja, mas no en blanco o rojo; o estan rayados en blanco y negro, mas no en azul o naranja; o no están rayados ni en blanco ni en naranja.

Considerando la naturaleza de esta conclusión, ni la expresión simbólica (I), mediante la cual se comunica, ni el análisis por el que se deduce esa expresión puede considerarse como innecesariamente complejo.

9. La forma en que la doctrina del silogismo se ha presentado en este capítulo da pie a una importante observación. Hemos visto que en cada una de sus dos grandes divisiones toda la discusión es reducible, en la medida por lo menos, en que atañe a la determinación de las reglas y los métodos, al análisis de un par de ecuaciones, a saber, del sistema (I) (2), cuando las premisas tienen términos medios iguales, y del sistema (4) (5) cuando los términos medios son desiguales. Además, aquel análisis se ha llevado a cabo de hecho merced a un método fundado sobre ciertas leyes generales, deducidas inmediatamente a partir de la constitución del lenguaje, capítulo II, confirmadas por el estudio de las operaciones de la mente humana, capítulo III, y probadas en cuanto a su aplicación al análisis de todos los sistemas de ecuaciones, cualesquiera que sean, mediante los cuales las proposiciones, o las combinaciones de proposiciones, pueden representarse, capítulo VIII. Aquí, pues, tenemos los medios para resolver con precisión la cuestión de si el silogismo es en verdad el tipo fundamental de razonamiento –de si el estudio de sus leyes es coextensivo con el estudio de la Lógica deductiva. Pues si fuera así, debe darse alguna indicación de este hecho en los sistemas de ecuaciones en cuyo análisis nos hemos detenido. No puede concebirse que el silogismo sea el único proceso esencial

de razonamiento y que, sin embargo, la manifestación de tal proceso no presente nada indicativo de tan alta cualidad de preeminencia. No hay signo alguno, sin embargo, de que la discusión de todos los sistemas de cuaciones que expresan proposiciones esté contenida en la del sistema particular examinado en este capítulo. Y sin embargo, los lógicos han sido unánimes en su afirmación referente no sólo a la supremacía, sino a la suficiencia universal de la inferencia silogística en el razonamiento deductivo. El lenguaje del arzobispo Whately, siempre claro y preciso, y merecedor de especial atención en el tema de la Lógica es muy explícito en este punto. "Pues la Lógica, "dice", que es, digámoslo así, la Gramática del Razonamiento, no presente el Silogismo regular como un *modo de argumentación diferenciado*, que puede ser *sustituido* por cualquier otro modo, sino como la forma a que *todo* razonamiento correcto puede, en última instancia, reducirse" (13). Y el Sr. Mill, en un capítulo de su Sistema de Lógica titulado, "Del raciocinio o el Silogismo", habiendo ennumerado las formas ordinarias del silogismo, observa, "Todo raciocinio válido, todo razonamiento por el que, de proposiciones generales admitidas previamente se infieren otras proposiciones igual o menos generales, puede expresarse en alguna de las formas anteriores". Y prosigue: "Somos, por tanto, libres, de conformidad con la opinión general de los lógicos de considerar las dos formas elementales de la primera figura como los tipos universales de todo raciocinio correcto". De acuerdo con estas opiniones se ha sostenido que la ciencia de la Lógica goza de una inmunidad respecto a aquellas condiciones de imperfección y de progreso a las que se hallan sometidas todas las otras ciencias. (14); y su origen a partir del esfuerzo de una mente poderosa de la antigüedad ha sido comparado con una metáfora en cierto modo atrevida, al nacimiento mitológico de Palas.

Como el Silogismo es una especie de eliminación, la cuestión que tenemos delante se descompone patentemente en las dos siguientes: Primero.– Si toda eliminación es reducible al Silogismo; Segundo.– Si el razonamiento deductivo puede considerarse correctamente como consistiendo sólo en eliminación. Creo, después de un examen cuidadoso, que la respuesta verdadera a la primera cuestión es que siempre es posible teoréticamente resolver y combinar las proposiciones de tal modo que la eliminación pueda efectuarse subsecuentemente mediante los cánones silogísticos, pero que el proceso de reducción sería en muchos casos forzado y artificial, y contedría operaciones que no son silogísticas. A la segunda cuestión respondo que el razonamiento no puede, salvo merced a una restricción arbitraria de su significado, limitarse al proceso de eliminación. Ninguna definición puede bastar que haga de él algo menos que el conjunto de los métodos que se fundan sobre las leyes del pensamiento, tal como se ejercen sobre las proposiciones; y entre aquellos métodos, el proceso de eliminación ocupa, sin perder por ello su eminente importancia, sólo un lugar.

Gran parte de la errónea doctrina en lo referente a la naturaleza del Silogismo y el alcance de su papel, parece fundarse, como no puedo por menos de pensar, en una disposición a considerar como *primarias* a todas aquellas verdades en el ámbito de la lógica que poseen el carácter de simplicidad y certeza intuitiva, sin investigar la

relación que guardan con otras verdades de esta ciencia, o con los métodos generales del Arte del Razonamiento. El *dictum de omni et nullo* de Aristóteles es un principio evidente, pero no se halla entre aquellas leyes *últimas* de la facultad razonante a las que todas las otras leyes, aun patentes y evidentes, admiten remontarse, y de que pueden según el orden más estricto de la evolución científica deducirse. Pues aunque en toda ciencia las verdades fundamentales son habitualmente las más sencillas de comprender, no es aquella simplicidad el *criterio* mediante el cual su pretensión de ser consideradas como fundamentales debe juzgarse. Este debe buscarse en la naturaleza y el alcance de la estructura que son capaces de fundamentar. Adoptando este punto de vista, pienso que Leibniz juzgó correctamente cuando asignó al "principio de contradicción" un lugar fundamental en la lógica (15), pues hemos visto las consecuencias de aquella ley del pensamiento cuya expresión axiomática es (III.15). Pero ya se ha dicho bastante sobre la naturaleza de la inferencia deductiva y sobre sus elementos constitutivos. El tema de la inducción puede recibir probablemente alguna atención en otra parte de esta obra.

10. Se ha hecho ver en este capítulo que el tratamiento ordinario de las proposiciones hipóteticas es mucho más defectuoso que el de las categóricas. Lo que se denomina habitualmente silogísmo hipótetico se muestra, ciertamente, como algo que no es en absoluto un silogísmo. Sea el argumento

Si A es B, C es D,

pero A es B,

por tanto C es D,

puesto en la forma

Si la proposición X es verdadera, Y es verdadera,
pero X es verdadera,
por tanto Y es verdadera,

en donde por X se entiende la proposición A es B, y por Y, la proposición C es D. Se ve, pues, que las premisas contienen solo dos términos o elementos, mientras que un silogísmo contiene esencialmente tres. El siguiente sería un silogísmo hipótetico genuino:

Si X es verdadero, Y es verdadero;
Si Y es verdadero, Z es verdadero;
$\therefore$ Si X es verdadero, Z es verdadero.

Tras la discusión de las proposiciones secundarias en una parte anterior de esta obra, es evidente que las formas del silogismo hipotético deben presentar, en todos los respectos, una contrapartida exacta a aquellas del silogismo categórico. Pueden introducirse proposiones *particulares*, tales como, "A veces si X es verdadero, Y es verdadero", y las condiciones y reglas de inferencia deducidas en este capítulo

para los silogismos categóricos pueden interpretarse sin mitigación para hacer frente a los casos correspondientes en los silogismos hipotéticos.

11. ¿A qué conclusiones finales somos, pues, conducidos respecto a la naturaleza y el alcance de la lógica escolástica?. Pienso que a las siguientes: que no es una ciencia, sino una colección de verdades científicas, demasiado incompletas como para formar un sistema por sí mismas, y no lo suficientemente fundamentales como para servir de fundamento a un sistema perfecto. No se sigue sin embargo de que del hecho de que la lógica escolástica halla sido investida con atributos a los que no tiene reclamación justa, no merezca por ello consideración. Un sistema que ha estado asociado con el mismo crecimiento del lenguaje, que ha dejado su huella sobre las cuestiones más importantes y las más famosas demostraciones de la filosofía, no puede ser enteramente desmerecedor de atención. La memoria también, y el uso, hay que admitirlo, tienen mucho que ver con los procesos intelectuales; y ciertos cánones de la antigua lógica se hallan casi entretejidos en la misma textura del pensamiento de las mentes cultas. Pero que las formas nemotécnicas en que se han mostrado las reglas particulares de la conversión y el silogismo posean alguna utilidad real, – que la misma habilidad que se supone imparten no podría, con mayor ventaja para los poderes mentales, adquirirse mediante los esfuerzos espontáneos de una mente abandonada a sus propios recursos –, son cuestiones que podría ser provechoso examinar. En lo concerniente a los resultados particulares deducidos en este capítulo, ha de observarse que están unicamente propuestos para cooperar a la investigación referente a la naturaleza de la lógica corriente o escolástica, y su relación con una teoría más perfecta del razonamiento deductivo.

REFERENCIAS

(12) Thomson: Outlines of the Laws of Thought. P. 177.
(13) Elements of Logic. P. 13, novena edición.
(14) Introducción a la "Logik" de Kant.
(15) Nuevos Ensayos sobre el entendimiento humano. Libro IV, capítulo 2. Teodicea. Pt. 1. Sección 44.

CAPITULO XVI

"SOBRE LA TEORIA DE LAS PROBABILIDADES"

1. Antes de que otro año acabe habrán transcurrido justamente dos siglos desde que Pascal resolviera la primera cuestión conocida dentro de la teoría de las probabilidades y estableciera, con su solución, las bases de una ciencia que no posee parte común con la atracción que pertenece a las especulaciones matemáticas más abstractas. El problema que el caballero de Meré, renombrado jugador, propuso al solitario de Port Royal–(aún no apartado de los intereses de la ciencia (16) por la contemplación más absorbente de "la grandeza y la miseria del hombre"), fué el primero de una larga serie de problemas destinados a crear nuevos métodos de análisis matemáticos y a proporcionar un valioso servicio a los aspectos prácticos de la vida. No se centra el interés del tema meramente en su conexión matemática o en sus aplicaciones utilitarias. Merece la pena fijar la atención en cuanto a la teoría de las probabilidades como objeto de especulación independiente – en los modos fundamentales en que ha sido concebido – en los grandes principios secundarios que, al igual que en la ciencia contemporánea de la Mecánica, han ido anexionándose a ella gradualmente – y finalmente en la apreciación del grado de perfección que ha sido ya conseguido. Hablo aquí de esa perfección que consiste en la unidad de concepto y en la armonía de procesos. Pretendemos estudiar muy brevemente algunos de estos puntos en este capítulo.

2. Un autor distinguido (17) ha establecido las definiciones fundamentales de la ciencia de esta manera: "La probabilidad de un acontecimiento es la razón que tenemos para creer que ha ocurrido, o que ocurrirá en el futuro". "La medida de la probabilidad de un acontecimiento es la proporción del número de casos favorables a ese acontecimiento respecto del número total de casos favorables o contrarios y todos igualmente posibles". (Susceptibles en igual medida de ocurrir).

A partir de estas definiciones se sigue que la palabra *probabilidad*, en su acepción matemática, hace referencia al estado de nuestro conocimiento de las circunstancias bajo las cuales un suceso puede acontecer o no. Con el grado de información que poseemos referente a las circunstancias de un suceso la razón que tenemos para pensar que ocurrirá, o mejor, para decirlo con un solo término, nuestra expectativa de que ocurra, variará. La probabilidad es la expectativa basada en un conocimiento

parcial. Un perfecto conocimiento de *todas* las circunstancias que se refieren al acaecimiento de un suceso cambiarían la expectativa en certeza y no dejarían lugar ni demanda para una teoría de las probabilidades.

3. Aunque nuestra expectativa se hace mucho mayor con el aumento de la proporción existente entre número de casos conocidos favorables a su acaecimiento y el número total de casos igualmente posibles, favorables o no favorables, no sería filosófico afirmar que la fuerza de esa expectativa, considerada como una emoción de la mente, es susceptible de referirse a cualquier patrón numérico. El hombre de temperamento sanguíneo alberga grandes esperanzas donde los tímidos se desesperan y los indecisos se pierden en la duda. Como temas de una investigación científica hay analogía entre la *opinión* y la *sensación*. El termómetro y la placa fotográfica cuidadosamente preparada, no indican la intensidad de las sensaciones de calor y luz, sino determinadas circunstancias físicas que acompañan la producción de esas sensaciones. De modo parejo, la teoría de las probabilidades se ocupa de la medida numérica de las circunstancias sobre las que se fundamenta la expectativa —y este propósito abarca toda la serie de sus aplicaciones admisibles—. Las reglas que nosotros utilizamos en los seguros de vida y en las demás aplicaciones estadísticas de la teoría de las probabilidades son totalmente independientes de los fenómenos *mentales* de la expectativa. Se fundan en la suposición de que el futuro se asemejará al pasado; que, bajo las mismas circunstancias, el mismo hecho tenderá a repetirse de nuevo con una frecuencia numérica determinada; no en ningún intento de someter a cálculo la fuerza de los temores y las esperanzas humanos.

Ahora bien, la experiencia atestigua, de hecho, que los acontecimientos de una determinada especie, y bajo determinadas circunstancias, tienden a repetirse con una frecuencia establecida, tanto si conocemos sus verdaderas causas como si no las conocemos. Por supuesto que esta tendencia es, en general, sólo patente cuando el área de observación es suficientemente grande. Los registros generales de una gran nación, sus registros de nacimientos y muertes en relación con la edad y el sexo, etc., ofrecen una notable uniformidad de año en año. En una determinada lengua, o familia de lenguas, los mismos sonidos y sucesiones de sonidos, y en el caso de una lengua escrita los mismos caracteres y sucesiones de caracteres, se repiten con una frecuencia determinada. La clave de las toscas inscripciones de Ogham, encontradas en diferentes partes de Irlanda, y en las que, en un principio, no pudieron detectarse distinciones entre las palabras, se recuperó por medio de la estricta aplicación de este principio (18). El mismo método, se entiende, ha sido aplicado (19) para descifrar los documentos cuneiformes que se han encontrado en las ruinas de Nínive bajo la iniciativa del señor Layard.

4. Intentemos, a partir de los postulados y definiciones anteriores, formar una idea del verdadero objeto de la teoría de las probabilidades. Hemos dicho que la probabilidad consiste en la expectativa basada en un determinado tipo de conocimiento, a saber, el conocimiento de la relativa frecuencia de acaecimiento de los hechos. De aquí que las probabilidades de los sucesos, o de combinaciones de

sucesos, tanto si son deducidos del conocimiento de la constitución particular de las cosas bajo la que estos sucesos acaecen, o si son derivados a partir de una larga observación de una serie pasada de acaecimientos y no acaecimientos, constituyen, en todos los casos, nuestros datos. La probabilidad de algún suceso relacionado, o combinación de sucesos, constituye el correspondiente *quaesitum* u objeto buscado. Ahora bien, en el más general y, sin embargo, estricto significado del término "suceso", toda combinación de sucesos constituye también un suceso. El acaecimiento simultáneo de dos o más sucesos, o el que acaezca un suceso bajo unas condiciones determinadas, o en cualquier conexión concebible con otros sucesos, es también un suceso. Utilizando el término con esta libertad de aplicación, el objeto de la teoría de las probabilidades puede definirse así: dadas las probabilidades de cualesquiera acontecimientos, de cualquier clase, hallar la probabilidad de cualquier otro suceso relacionado con ellos.

5. Los sucesos pueden dividirse en simples y compuestos, siendo estos últimos sucesos que consisten en una combinación de sucesos simples (I. 13). De esta forma, podemos definir el fin práctico de la teoría que estamos considerando el determinar la probabilidad de algún suceso, simple o compuesto, a partir de las probabilidades dadas de otros sucesos, simples o compuestos, con los que, a partir de su definición, se halla relacionado. Así, si se sabe a partir de cómo es un dado que hay probabilidad, medida por la fracción 1/6, que el resultado de una determinada tirada será un as, y si se pide determinar la probabilidad de que saldrá un as, y sólamente uno, en dos tiradas sucesivas, podemos establecer el problema en el orden de sus *datos* y su *quaesitum* como sigue:

PRIMER DATO: Probabilidad del suceso de que en la primera tirada salga un as $=1/6$

SEGUNDO DATO: Probabilidad del suceso de que en la segunda tirada salga un as $=1/6$

QUAESITUM: Probabilidad de que la primera tirada nos dé un as y la segunda no nos dé un as; o que en la primera no salga un as y en la segunda sí.

En este caso, los dos datos son las probabilidades de sucesos simples definidos como que en la primera tirada salga un as y en la segunda también salga. El quaesitum es la probabilidad de un suceso compuesto —una determinada combinación disyuntiva de los sucesos simples contenidos o implicados en los datos. Probablemente ocurrirá, en general, cuando las condiciones numéricas de un problema sean capaces de deducirse como arriba a partir de la constitución de las cosas bajo las que se dan, que los datos serán las probabilidades de sucesos *simples* y el quaesitum la probabilidad de un suceso *compuesto* dependiente de los sucesos simples ya dichos. Este es el caso de una serie de problemas que ha ocupado, quizá indebidamente, la atención de aquellos que han estudiado la teoría de las probabilidades, a saber, juegos de azar y habilidad, en el primero de los cuales una circunstancia física, como la composición de un dado, determina la probabilidad de cada paso posible del juego, siendo su resultado alguna combinación definida de esos pasos; mientras

que en el último, la relativa destreza de los jugadores, supuesto conocida *a priori*, determina igualmente el mismo elemento. Pero donde, como en los problemas de estadística, los elementos de nuestro conocimiento están extraídos no del estudio de la constitución de las cosas, sino de las observaciones registradas de la naturaleza o de la sociedad humana, no hay razón por la que los datos que tales observaciones nos proporcionan hayan de ser las probabilidades de sucesos simples. Por el contrario, el acontecimiento de sucesos o condiciones en combinaciones establecidas (indicativa de una conexión secreta de tipo causal), nos sugiere la conveniencia de hacer tales coincidencias, útiles para una futura enseñanza por medio de una relación numérica de su frecuencia. Ahora bien, los datos que proporcionan las observaciones de este tipo, son las probabilidades de sucesos compuestos. La solución, por medio de algún método general, de problemas en los que tenemos ese tipo de datos, es no sólo esencial para el desarrollo perfecto de la teoría de las probabilidades, sino también, quizás, condición necesaria de su aplicación a una extensa y prácticamente importante clase de investigaciones.

6. Antes de que sigamos estimando en qué medida se pueden aplicar métodos conocidos a la solución de problemas del tipo de los tratados anteriormente, será conveniente apercibirse de que hay otra forma desde la cual podemos considerar todas las cuestiones de la teoría de las probabilidades, y esta forma consiste en sustituir los *sucesos* por las proposiciones que afirman que aquellos sucesos han ocurrido u ocurrirán, y considerar el elemento de probabilidad numérica como haciendo referencia a la *verdad* de aquellas *proposiciones*, y no al *acaecimiento* de los *sucesos* en relación a los cuales afirman. Así, en vez de considerar la fracción numérica p como expresión de la probabilidad de que suceda el caso E, consideré-mosla como representando la probabilidad de la verdad de la proposición X, que afirma que el suceso E ocurrirá. Del mismo modo, en vez de considerar cualquier probabilidad q, como referida a algún suceso compuesto, tal como la coincidencia de los sucesos E y F, hagamos que represente la probabilidad de la verdad de la proposición que afirma que E y F ocurrirán conjuntamente; y de la misma manera, hagamos la transformación de combinaciones de sucesos disyuntivas e hipotéticas, a proposiciones disyuntivas y condicionales. Aunque la nueva aplicación que hemos asignado a la probabilidad es necesariamente una concomitancia de la antigua, su adopción tendrá una ventaja práctica extraída de la circunstancia de que ya hemos tratado la teoría de las proposiciones, de que hemos definido sus principales variedades y establecido métodos para determinar, en cada caso, la cantidad y el tipo de su dependencia mutua. Cualquier teoría general de las probabilidades debe apoyarse sobre esto, o sobre una base equivalente. No digo que no puedan ser necesarias otras consideraciones en determinados casos de la teoría aplicada. Los datos pueden resultar insuficientes para una solución definida y este defecto puede que tenga que ser subsanado por medio de la hipótesis. O, donde tengamos la relación de grandes números, podemos encontrar dificultades *después de la solución* de esta procedencia, para las cuales son necesarios métodos especiales de tratamiento. Pero en cada caso alguna forma del problema general, tal como arriba se expuso (Art. 4), está

contenida y el adecuado y peculiar trabajo de la teoría consiste en la discusión de ese problema. Quiero que se tenga en cuenta que las investigaciones de los próximos capítulos están principalmente dedicadas a este objetivo. No intento entrar, excepto incidentalmente, en las cuestiones que atañen a hipótesis suplementarias, porque es de importancia primordial, incluso en relación a tales cuestiones (I. 17) el que un método general se establezca primero, fundamentado y basado en una sólida y fuerte base teórica.

7. Lo que sigue es un resumen, tomado principalmente de Laplace, de los principios que han sido aplicados a la solución de problemas de probabilidad. Son consecuencias de sus definiciones fundamentales ya establecidas y pueden considerarse como indicativos del grado en el que ha sido posible hacer estas definiciones.

PRIMER PRINCIPIO.— Si p es la probabilidad del acaecimiento de cualquier suceso, $1 - p$ será la probabilidad de su no acaecimiento.

SEGUNDO.— La probabilidad de la concurrencia de dos sucesos independientes es producto de las probabilidades de esos sucesos.

TERCERO.— La probabilidad de la concurrencia de dos sucesos dependientes es igual al producto de la probabilidad de uno de ellos por la probabilidad de que si ese suceso acaece, el otro también ocurrirá.

CUARTO.— La probabilidad de que si un suceso E tiene lugar, un suceso F también tendrá lugar, es igual a la probabilidad de la concurrencia de los sucesos E y F, dividida por la probabilidad del acaecimiento de E.

QUINTO.— La probabilidad del acaecimiento de uno de los dos sucesos que no pueden concurrir, es igual a la suma de sus probabilidades separadas.

SEXTO.— Si un suceso observado puede solamente resultar a partir de un número n de causas diferentes que son *a priori* igualmente probables, la probabilidad de cualquiera de las causas es una fracción cuyo numerador es la probabilidad del suceso, bajo la hipótesis de la existencia de esa causa, y cuyo denominador es la suma de las probabilidades similares relativas a todas las causas.

SEPTIMO.— La probabilidad de un suceso futuro es la suma de los productos formados al multiplicar la probabilidad de cada causa por la probabilidad de que si aquella causa existe, el suceso futuro acaecerá.

8. Respecto al alcance y a la relativa suficiencia de estos principios, pueden hacerse las siguientes observaciones:

En primer lugar es siempre posible por medio de la debida combinación de estos principios, expresar la probabilidad de un suceso compuesto, dependiente de cualquier manera de sucesos simples independientes cuyas distintas probabilidades estén dadas. Una gran proporción de los problemas que se han resuelto realmente son de este tipo, y la dificultad de su solución no ha surgido de la insuficiencia de las indicaciones proporcionadas por la teoría de las probabilidades, sino de la necesidad de un análisis que proporcionaría esas indicaciones disponibles cuando

funciones de grandes números o series formadas por muchos y complicados términos se introducen de ese modo. Por lo tanto, se puede admitir completamente que todos los problemas que tengan como datos las probabilidades de sucesos simples independientes, están dentro del ámbito de los métodos aceptados.

En segundo lugar, algunos de los principios enumerados con anterioridad, y especialmente el sexto y el séptimo, no presuponen que todos los datos sean las probabilidades de sucesos simples. En su aplicación particular a cuestiones de causalidad dan sin embargo por supuesto que las causas que tienen en cuenta son mutuamente exclusivas, de modo que no es posible ninguna combinación de ellos en la producción de un efecto. Si, como antes se ha explicado, trasladamos las probabilidades numéricas de los sucesos con los que están relacionadas a las proposiciones por las que esos sucesos se expresan, el problema más general a que se puede aplicar los principios antes mencionados puede exponerse en el siguiente orden de *datos* y *quaesita*:

DATOS

PRIMERO.– Las probabilidades de las proposiciones condicionales n

Si la causa A_1 existe, el suceso E le seguirá.

Si la causa A_2 existe, el suceso E le seguirá.

. . . . . .

Si la causa A_n existe, el suceso E le seguirá.

SEGUNDO.– La condición de que los antecedentes de esas proposiciones sean mutuamente conflictivos.

SE REQUIERE

La probabilidad de la verdad de la proposición que manifiesta el acaecimiento del suceso E; también, cuando esa proposición es conocida como verdadera, las probabilidades de verdad de las varias proposiciones que afirman los respectivos acaecimientos de las causas $A_1, A_2 \ldots A_n$.

Aquí se ve que los datos son las probabilidades de una serie de sucesos compuestos, expresados por medio de proposiciones *condicionales*. Pero obviamente, el sistema es muy limitado y realmente particular. Pues los antecedentes de las proposiciones están sujetos a la condición de ser mutuamente exclusivos y no hay más que un consecuente, el suceso E, en todo el sistema. No se sigue de nuestra capacidad de discutir un sistema como el anterior, que seamos capaces de resolver problemas cuyos datos son las probabilidades de *cualquier* sistema de proposiciones condicionales; menos aún que podamos resolver problemas cuyos datos son las probabilidades de *cualquier sistema de proposiciones* y, considerando la cuestión más bien desde su aspecto material que desde su aspecto formal, es evidente que la hipótesis de causalidad *exclusiva* es algo que a menudo no ocurre en el mundo real, cuyos fenómenos parecen ser, habitualmente, productos de causas complejas, siendo desconocido el carácter y cantidad de su cooperación. Tal es, sin duda, el

caso en casi todos los ámbitos de investigación natural o social, en los que la doctrina de las probabilidades ofrece cualquier nueva promesa de aplicaciones útiles.

9. Podemos añadir otro principio a los anteriores, formulado en los siguientes términos por el Profesor Savilian de Astronomía en la Universidad de Oxford (20): "Principio 8. Si hay cualquier número de hipótesis mutuamente excluyentes h_1, h_2, h_3,.. cuyas probabilidades relativas a un estado particular de información son p_1, p_2, p_3,... y si nos dan nueva información que cambia las probabilidades de alguna de ellas supongamos h_{m+1} y las que siguen, sin tener *ninguna otra referencia al resto,* entonces las probabilidades de estas últimas tienen las mismas proporciones entre sí que las que tenían antes y después de la nueva información, esto es

$$p'_1 : p'_2 : p'_3 \ldots : p'_m = p_1 : p_2 : p_3 \ldots : p_m,$$

donde las letras acentuadas representan los valores después de obtenerse la nueva información".

Este principio es manifiestamente de un carácter más fundamental que todos los que han sido enumerados con anterioridad y quizás pudiera considerarse como axiomático, tal y como ha sugerido el profesor Donkin. Parece, ciertamente, estar basado en la misma definición de la medida de la probabilidad como "la proporción entre el número de casos favorables a un suceso y el número total de casos favorables o contrarios y todos igualmente posibles". Pues adoptando esta definición, es evidente que en cualquiera que sea la proporción en que el número de casos igualmente posibles disminuya mientras que el número de casos favorables permanezca inalterado, en exactamente la misma proporción aumentarán las probabilidades de cualesquiera sucesos a los que estos casos se refieran. Y como la nueva hipótesis, a saber, disminución del número de casos posibles sin afectar al número de ellos que son favorables a los sucesos en cuestión, aumenta las probabilidades de estos sucesos en una proporción constante, las medidas relativas de aquellas probabilidades permanecen inalteradas. Si el principio que estamos tratando fuera, entonces, como parece que es, inseparablemente incluido en la misma definición de probabilidad, apenas puede, *por sí mismo,* llevarnos más allá para la solución de los problemas de lo que el atento estudio de la definición lo haría por sí solo. A partir de estas consideraciones parece que es dudoso si, sin alguna ayuda diferente a todas las que se han brindado hasta ahora, puede esperarse cualquier avance considerable o valioso, en la teoría de las probabilidades como rama de conocimiento especulativo o en la solución práctica de sus problemas. Y el establecimiento, *solamente* sobre la base de una colección de principios como los anteriores, de un método aplicable universalmente a la solución de los problemas, sin tener en cuenta el número ni la naturaleza de las proposiciones implicadas en la expresión de sus datos, parece ser imposible. Para la consecución de tal objetivo se necesitan otros elementos cuya consideración nos ocupará en el próximo capítulo.

REFERENCIAS

(16) Ver en particular una carta de Pascal a Fermat, que había solicitado su atención hacia un problema matemático (Port Royal, por M. de Sainte Beuve); además varios pasajes en la colección de Fragmentos publicada por M. Prosper Faugere.

(17) Poissón, Recherches sur la Probabilité des Jugemens.

(18) El descubrimiento se debe al Rev. Charles Graves, profesor de Matemáticas en la Universidad de Dublín. Vide Proceedings of the Royal Irish Academy, Feb. 14, 1848. El profesor Graves me informa que ha verificado el principio construyendo tablas de secuencias para todas las lenguas europeas.

(19) Por el docto orientalista Dr. Edward Hincks.

(20) "On certain questions relations to the Theory of Probabilities", por W. F. Donkin. M.A., F.R.S., ¿ Philosophical Magazine. Mayo, 1851.

CAPITULO XVII

DEMOSTRACION DE UN METODO GENERAL PARA LA SOLUCION DE PROBLEMAS EN LA TEORIA DE LAS PROBABILIDADES

1. Se ha definido (XVI. 2) que "la medida de la probabilidad de un suceso es la proporción entre el número de casos favorables a ese suceso y el número total de casos favorables o no favorables y todos igualmente posibles". En las investigaciones que siguen el término probabilidad, se usará en el sentido anterior de "medida de la probabilidad".

De la definición anterior podemos deducir las siguientes conclusiones:

I.– Cuando es seguro que un suceso ocurrirá, la probabilidad de ese suceso, en el sentido matemático expresado arriba, es 1. Pues los casos que son favorables al suceso y los casos que son posibles son, en este caso, los mismos.

Por lo tanto, si p es la probabilidad de que un suceso x ocurra $1 - p$ será la probabilidad de que dicho suceso no ocurra. Para deducir este resultado directamente de la definición, sea m el número de casos favorables al suceso x, n el número de casos posibles, entonces $n - m$ es el número de casos no favorables al suceso x.

Por lo tanto, por definición,

$$\frac{m}{n} = \text{probabilidad de que } x \text{ ocurra.}$$

$$\frac{n-m}{n} = \text{probabilidad de que } x \text{ no ocurra.}$$

Pero
$$\frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - p.$$

II.– La probabilidad de la concurrencia de dos sucesos cualesquiera es el producto de la probabilidad de cualquiera de esos sucesos para la probabilidad de que si ese suceso ocurre, el otro también acaecerá.

Sea m el número de casos favorables al acaecimiento del primer suceso y n el número de casos no favorables e igualmente posibles; entonces, la probabilidad del primer suceso es, por definición $\frac{m}{m+n}$. De los m casos favorables al primer suce-

so, sean l casos favorables a la conjunción del primer y el segundo sucesos, entonces, por definición, $\frac{l}{m}$ es la probabilidad de que si el primer suceso ocurre, el segundo también ocurrirá.

Multiplicando estas fracciones tenemos

$$\frac{m}{m+n} \times \frac{l}{m} = \frac{l}{m+n}.$$

Pero la fracción resultante $\frac{l}{m+n}$ tiene como numerador el número de casos favorables a la conjunción de los sucesos y como denominador, el número $m+n$ de casos posibles. Representa, por lo tanto, la probabilidad del acaecimiento conjunto de los dos sucesos.

Así que, si p es la probabilidad de cualquier suceso x y q la probabilidad de que si x ocurre y sucederá, la probabilidad de la conjunción xy será pq.

III.— La probabilidad de que si un suceso x acaece, el suceso y ocurrirá, es una fracción cuyo numerador es la probabilidad de su mutuo acaecimiento y su denominador la probabilidad del acaecimiento del suceso x.

Esto es una consecuencia inmediata del segundo principio.

IV.— La probabilidad de que ocurra algún suceso de una serie de acaecimientos exclusivos, es igual a la suma de sus probabilidades separadas.

Pues sea n el número de casos posibles; m_1 el número de aquellos casos favorables al primer suceso; m_2 el número de casos favorables al segundo, etc. Entonces las probabilidades separadas de los sucesos son $\frac{m_1}{n}$, $\frac{m_2}{n}$, etc. Además, como los sucesos son exclusivos, ninguno de los casos favorables a uno de ellos es favorable al otro; y por lo tanto el número de casos favorables a alguno de las series será $m_1 + m_2$ .., y la probabilidad del acaecimiento de alguna de las series será $\frac{m_1 + m_2 \cdots}{n}$.

Pero esta es la suma de las fracciones anteriores, $\frac{m_1}{n}$, $\frac{m_2}{n}$, etc... Por lo que el principio resulta manifiesto.

2. DEFINICION.— Se dice que dos sucesos son independientes cuando la probabilidad de que cualquiera de los dos suceda no es afectada por nuestra expectativa del acaecimiento o del no acaecimiento del otro.

A partir de esta definición, combinada con el Principio II, tenemos la siguiente conclusión:

V.— La probabilidad del acaecimiento de dos sucesos independientes es igual al producto de las probabilidades separadas de esos sucesos.

Pues si p es la probabilidad de un suceso x, q la de un suceso y considerado como completamente independiente de x, entonces q es también la probabilidad de

que si x sucede, y sucederá también. De aquí que, por el Principio II, pq es la probabilidad de la concurrencia de x e y.

Bajo las mismas circunstancias, la probabilidad de que x ocurra e y no suceda será p (1 − q). Pues p es la probabilidad de que x sucederá y $1 - q$ la probabilidad de que y no sucederá. De la misma manera (1 − p) (1 − q) será la probabilidad de que ambos sucesos no ocurran.

3. Existe, sin embargo, otro principio, de un tipo diferencial al de arriba, pero necesario para las subsiguientes investigaciones de este capítulo, antes de pasar a cuya exposición explícita, deseo hacer una o dos observaciones preliminares.

En primer lugar, destacaría que la distinción entre sucesos simples y compuestos no se encuentra en la naturaleza de los sucesos en sí, sino en el modo o conexión con que se presentan en la mente. ¿Cuántos sucesos individuales se contienen en los términos "tener salud", "prosperar", etc. considerables como expresión de un único acontecimiento?. Los usos prescriptivos del lenguaje, que han asignado a combinaciones particulares de sucesos nombres únicos y definidos, y han dejado sin enumerar otras combinaciones para ser expresadas por combinaciones correspondientes de distintos términos o frases, es esencialmente arbitrario. Cuando designamos, pues, como sucesos simples aquellos que se expresan por un sólo verbo, o por lo que los gramáticos llaman una oración simple, no queremos presuponer ninguna simplicidad real en los sucesos mismos, sino usar el término únicamente haciendo referencia a la expresión gramatical.

4. Ahora bien, si esta diferenciación de los sucesos entre simples y compuestos, no se funda en su naturaleza real, sino que se apoya en los accidentes del lenguaje, no puede afectar a la cuestión de su dependencia o independencia mutuas. Si mi conocimientos de dos sucesos simples está limitado a este suceso particular, a saber, a que la probabilidad del acaecimiento de uno de ellos es p y la del otro q; entonces considero los sucesos como independientes y por lo tanto afirmo que la probabilidad de que sucedan a la vez es pq. Pero el fundamento de esta afirmación no es que los sucesos sean simples, sino que los datos no aportan información alguna sobre alguna conexión o dependencia entre ellos. Cuando se dan las probabilidades de los sucesos, pero se retiene toda información sobre su dependencia, la mente los considera como independientes y este modo de pensar es igualmente correcto tanto si los sucesos, juzgados de acuerdo a la expresión de hecho, son simples como si son compuestos, es decir, tanto si cada uno de ellos se expresa por un verbo simple como si lo es por medio de una combinación de verbos.

5. Supóngase, sin embargo, que junto con las probabilidades de ciertos sucesos poseemos información concreta sobre sus posibles combinaciones. Sepamos, por ejemplo, que ciertas combinaciones no pueden suceder y que, por lo tanto, sólo el resto de las combinaciones son posibles. En este caso es aún aplicable el mismo principio general. La manera de aprovecharnos de esta información en el cálculo de la probabilidad de cualquier resultado concebible de los sucesos, no depende de la

naturaleza de los sucesos cuyas probabilidades y cuyos límites de conexión posible nos son dados. No importa si son simples o compuestos. Es indiferente de qué fuente, o por qué métodos se ha derivado el conocimiento de sus probabilidades y de sus relaciones. Debemos considerar los sucesos como independientes de cualquier conexión además de la que tenemos información, *considerando sin importancia el que tal información nos haya sido explícitamente suministrada en los datos, o que haya sido deducida por inferencia lógica a partir de ellos.* Y esto nos lleva a formular el principio general en cuestión, a saber:

VI.— Los sucesos cuyas probabilidades son dadas han de ser considerados como independientes de cualquier conexión, salvo la que es o expresada o necesariamente contenida en los datos; y el modo en que hemos de emplear nuestro conocimiento de esa conexión es independiente de la naturaleza de la fuente de la que se ha derivado tal conocimiento.

La importancia práctica del principio anterior consiste en la circunstancia de que cualquiera que sea la naturaleza de los sucesos cuyas probabilidades se dan, —cualquiera que sea la naturaleza del suceso cuya probabilidad se busca, podemos en cualquier caso, por medio de una aplicación del cálculo de la Lógica, determinar la expresión del último suceso como una combinación determinado de los primeros sucesos e indicar concretamente el total de las relaciones implicadas conectando los primeros sucesos entre sí. En otras palabras, podemos determinar cuál es aquella combinación de los sucesos dados cuya probabilidad se pide y cuáles combinaciones de los mismos son las únicas posibles. Se sigue entonces del principio anterior que podemos razonar sobre aquellos sucesos como si fueran sucesos simples, cuyas condiciones de combinación posible hubiesen sido dadas directamente por la experiencia y de la cual se busca la probabilidad de alguna combinación determinada. La posibilidad de un método general en probabilidades depende de esta reducción.

6. Como las investigaciones en que estamos a punto de entrar ahora se basan en el empleo del Cálculo de la Lógica, es necesario explicar ciertos términos y modos de expresión que se derivan de esta aplicación.

Por el suceso x entiendo aquel suceso del cual la proposición que afirma el acaecimiento se expresa simbólicamente por la ecuación

$$x = 1.$$

Por el suceso $\phi(x, y, z, \ldots)$ entiendo aquel suceso cuyo acaecimiento se expresa por la ecuación

$$\phi(x, y, z, \ldots) = 1.$$

Un suceso tal puede denominarse suceso compuesto, en relación a los sucesos simples x, y, z, que involucra su concepción. Así, si x representa el suceso "Llueve", y el suceso "Truena", y el acaecimiento separado de estos sucesos se expresa por la ecuación lógica

$$x = 1, \qquad y = 1,$$

entonces x(1 − y) + y(1 − X) representa el suceso o estado de cosas denotado por la Proposición "O llueve o truena pero no ambas cosas"; siendo la expresión de ese estado de cosas

$$x(1-y) + y(1-x) = 1.$$

Si en aras a la brevedad representamos la función $\phi(x, y, z, \ldots)$ utilizada en la acepción anterior por V, es evidente (VI. 13) que la ley de la dualidad

$$V(1 - V) = 0,$$

será igualmente satisfecha. Diremos que los sucesos simples x, y, z, están "condicionados" cuando no pueden suceder en cualquier combinación posible; en otras palabras, cuando algún suceso compuesto dependiente de ellos no pueda acaecer. Así, los sucesos indicados por las proposiciones "Llueve", "Truena", están "condicionados" si el suceso expresado por la proposiciones "Truena, pero no llueve" es excluido de la existencia, de tal manera que la gama posible de combinación es menor que la gama de combinación concebible. Sucesos simples no condicionados son independientes por definición.

Cualquier suceso compuesto se dice de modo parejo que está condicionado si se presupone que sólo puede ocurrir bajo una condición determinada, esto es, en combinación con cualquier otro suceso que constituye, por su presencia, esa condición.

7. Procederemos según el orden natural de pensamiento, de sucesos simples y no condicionados a sucesos compuestos y condicionados.

PROPOSICION I

PRIMERO.– *Si p, q, r, son las respectivas probabilidades de cualesquiera sucesos simples no condicionados x, y, z, la probabilidad de un suceso compuesto V será* $[V]$, *formándose esta función* $[V]$ *cambiando, en la función V, los símbolos x, y, z, por p, q, r, etc.*

SEGUNDO.– *Bajo las mismas circunstancias, la probabilidad de que si el suceso V ocurre, cualquier otro suceso V′ también ocurra, será* $\frac{[VV']}{[V]}$ *donde* $[VV']$ *indica el resultado obtenido al multiplicar las funciones lógicas V y V′ y cambiando en el resultado x, y, z etc. por p, q, r, etc.*

Limitemos nuestra atención, en primer lugar, a las combinaciones posibles de los dos sucesos simples x e y, cuyas respectivas probabilidades son p y q. Las combinaciones primarias de estos sucesos (V. 11) y sus probabilidades correspondientes son como sigue:

SUCESOS		*PROBABILIDADES*
xy,	concurrencia de x e y	pq
x(1 − y),	acaecimiento de x sin y	p(1 − q)
(1 − x)y,	acaecimiento de y sin x	(1 − p)q
(1 − x) (1 − y),	no acaecimiento conjunto de x e y	(1 − p) (1 − q)

Vemos que en estos casos la probabilidad del suceso compuesto, representada por un constituyente, es la misma función de p y q, como la expresión lógica de ese suceso es de x e y; y es obvio que esta observación es aplicable, cualquiera que sea el número de sucesos simples cuyas probabilidades se dan, y cuya *existencia o no existencia conjunta* está contenida en el suceso compuesto del que buscamos la probabilidad.

Considérese, en segundo lugar, cualquier combinación *disyuntiva* de los constituyentes anteriores. El suceso compuesto, expresado en lenguaje corriente como el acacimiento de "o el suceso x sin el suceso y, o el suceso y sin el suceso x" se expresa simbólicamente en la forma $x(1-y) + y(1-x)$ y su probabilidad, determinada por los principios IV y V es $p(1-q) + q(1-p)$.

La última de estas expresiones es la misma función de p y q, así como la primera lo es de x e y. Y es obvio que esto también es un ejemplo particular de una regla general. Los sucesos expresados por dos o más constituyentes son recíprocamente exclusivos. La única combinación posible entre ellos es una combinación *disyuntiva*, expresada en el lenguaje ordinario por medio de la conjunción *o*, y en el lenguaje de la lógica simbólica por medio del signo +. Ahora bien, la probabilidad de que suceda algún caso de entre un grupo de sucesos recíprocamente excluyentes, es la suma de sus probabilidades separadas y se expresa conectando las expresiones de estas probabilidades separadas por medio del signo +. Así, la ley ejemplificada anteriormente aparece como *general*. La probabilidad de cualquier suceso no condicionado V la encontraremos cambiando en V los símbolos $x, y, z, \ldots$ por $p, q, r, \ldots$

8. Además, por el Principio III, la probabilidad de que si el suceso V ocurre, el suceso V′ ocurrirá también, se expresa por una fracción cuyo numerador es la probabilidad del acaecimiento conjunto de V y V′ y cuyo denominador es la probabilidad de que V ocurra.

Ahora bien, la expresión de aquel suceso, o estado de cosas, constituido por el acaecimiento conjunto de los sucesos V y V′ y se formará multiplicando las expresiones V y V′ de acuerdo con las leyes del Cálculo de la Lógica; puesto que sean los que fueren los constituyentes hallados tanto en V como en V′, aparecerán en el producto, y no otros. Además, por lo que se acaba de mostrar, la probabilidad del suceso representado por ese producto quedará determinada cambiando en él $x, y, z,$ por $p, q, r, \ldots$ De aquí que el numerador buscado será lo que $[VV']$ representa por definición.

Y el denominador será $[V]$ y por lo tanto,

Probabilidad de que si V sucede, V' ocurrirá junto con el $= \frac{[VV']}{[V]}$.

9. Por ejemplo, si las probabilidades de los sucesos simples x, y, z, son p, q, r, respectivamente, y se nos pide hallar la probabilidad de que si x o y ocurren, entonces o y o z ocurrirán, tenemos como expresión lógicas del antecedente y el consecuente las siguientes:

PRIMERO.– O x o y ocurre, $x(1-y) + y(1-x)$.

SEGUNDO.– O y o z ocurre, $y(1-z) + z(1-y)$.

Si ahora multiplicamos estas dos expresiones de acuerdo con las reglas del Cálculo de la Lógica, tendremos para la expresión de la concurrencia del antecedente y el consecuente

$$xz(1-y) + y(1-x)(1-z).$$

Cambiando en este resultado x, y, z, por p, q, r, y transformando similarmente la expresión del antecedente, hallamos para la probabilidad buscada el valor

$$\frac{pr(1-q) + q(1-p)(1-r)}{p(1-q) + q(1-p)}.$$

La función especial del cálculo, en un caso como el de arriba, es proporcionar la función de la razón al determinar cuáles son las coyunturas involucradas, a la vez en el consecuente como en el antecedente. Pero la ventaja de esta aplicación es casi totalmente prospectiva y se hará manifiesta en la siguiente proposición.

PROPOSICION II

10. *Se sabe que las probabilidades de ciertos sucesos simples x, y, z, ... son respectivamente p, q, r, ... cuando se satisface cierta condición V; siendo V una función de x, y, z, ... Se piden las probabilidades absolutas de los sucesos x, y, z, ... esto es, las probabilidades de sus respectivos acaecimientos, independientemente de la condición V.*

Sean p', q', r', etc., las probabilidades pedidas, esto es, las probabilidades de los sucesos x, y, z, ... considerados no sólo como hechos simples, sino como independientes también. Entonces, por la Proposición I, las probabilidades de que estos sucesos ocurran cuando la condición V, representada por la ecuación lógica $V = 1$, se satisface, son:

$$\frac{[xV]}{[V]}, \quad \frac{[yV]}{[V]}, \quad \frac{[zV]}{[V]}, \text{ &c.,}$$

Donde [xV] indica el resultado obtenido al multiplicar V por x, de acuerdo con las leyes del Cálculo de la Lógica, y cambiando en el resultado x, y, z, por p', q', r', etc. Pero las probabilidades condicionadas de arriba son por hipótesis iguales respectivamente a p, q, r ... Entonces tenemos:

$$\frac{[xV]}{[V]} = p, \quad \frac{[yV]}{[V]} = q, \quad \frac{[zV]}{[V]} = r, \text{ &c.,}$$

de cuyo sistema de ecuaciones igual en número a las cantidades p', q', r',... pueden determinarse los valores de esas cantidades.

Ahora bien, xV consta simplemente de aquellos constituyentes de V de los que x es un factor. Representamos esta suma por V_x y de modo parejo representemos yV por V_y, etc... Nuestras ecuaciones toman entonces la forma:

$$\frac{[V_x]}{[V]} = p, \quad \frac{[V_y]}{[V]} = q, \text{ &c.;} \qquad (1)$$

donde $[Vx]$ indica los resultados obtenidos cambiando en Vx los símbolos x, y, z, etc., por p', q', r', etc.

Para que resulte más evidente el significado del problema general y el principio de su solución, tomemos el siguiente ejemplo. Supongamos que al sacar las bolas de una urna sólo se ha prestado atención a aquellos casos en que las bolas sacadas eran o de un color determinado, "blanco", o de algún material determinada, "mármol", o que tuvieran estas dos características, y no se ha tenido en cuenta aquellos casos en que la bola sacada no era ni blanca ni de mármol. Hagamos que haya ocurrido que, siempre que la supuesta condición se cumpliera, había una probabilidad p de que se sacara una bola blanca y una probabilidad q de que se sacara una bola de mármol; y a partir de sólo estos datos pídasenos hallar la probabilidad de que en la próxima extracción, sin referencia alguna a la condición antes mencionada, se sacará una bola blanca, y también la probabilidad de que se saque una bola de mármol.

Aquí si x representa la extracción de una bola blanca, y la de una de mármol, la condición V será representada por la función lógica

$$xy + x(1 - y) + (1 - x)\, y.$$

Entonces tenemos

$$V_x = xy + x(1 - y) = x, \qquad V_y = xy + (1 - x)\, y = y;$$

De donde

$$[V_x] = p, \qquad [V_y] = q;$$

siendo las ecuaciones finales del problema

$$\frac{p'}{p'q' + p'(1 - q') + q'(1 - p')} = p, \quad \frac{q'}{p'q' + p'(1 - q') + q'(1 - p')} = q;$$

de donde hallamos

$$p' = \frac{p + q - 1}{q}, \quad q' = \frac{p + q - 1}{p}.$$

Se ve que p' y q' son respectivamente proporcionales a p y q, tal como debieran ser por el principio del Profesor Donkin. La solución de esta clase de problemas podría obtenerse ciertamente por medio de una aplicación directa de ese principio.

Resalto aquí, para hacer frente a una posible objeción, que el razonamiento anterior no exige que el sacar una bola blanca y una bola de mármol sean independientes, en virtud de la constitución física de las bolas. El presuponer su independencia está realmente implícito en la solución, pero no se basa en ninguna suposición anterior sobre la naturaleza de las bolas, y sus relaciones o ausencia de relaciones, de forma, color, estructura, etc. Se fundamenta sobre nuestra total ignorancia de estas cosas. La probabilidad hace siempre referencia al estado de nuestro conocimiento efectivo y su valor numérico varía según cambia la información.

PROPOSICION III

11. *Para determinar en cualquier cuestión de probabilidades la conexión lógica del quaesitum con los datos; esto es, hacer del suceso cuya probabilidad se busca, una función lógica del suceso cuyas probabilidades se dan.*

Representen S, T, etc. cualesquiera sucesos compuestos cuyas probabilidades nos son dadas, siendo S y T en expresión funciones conocidas de los símbolos x, y, z, etc., que representan sucesos simples. De modo parejo represente W cualquier suceso cuya probabilidad se busca, siendo W también una función conocida de x, y, z, etc. Como S, T, ... W deben cumplir la ley fundamental de la dualidad, podemos sustituirlas por símbolos lógicos simples, s, t, ... w. Hagamos, pues, que

$$s = S, \quad t = T, \quad w = W.$$

Por la definición de S, T, ... W se tratará de una serie de ecuaciones lógicas que conectan los símbolos s, t, ...w, con los símbolos x, y, z, ...

Por los métodos del Cálculo de la Lógica podemos eliminar del sistema anterior cualquiera de los símbolos x, y, z... que representan sucesos cuyas probabilidades no se nos dan, y determinar w como una función desarrollada de s,t, etc, y de tales de entre los símbolos x, y, z, etc., si existe alguno, que correspondan a sucesos cuyas probabilidades son dadas. El resultado será de la forma

$$w = A + 0\,B + \frac{0}{0}\,C + \frac{1}{0}\,D,$$

donde A, B, C y D comprenden entre sí todos los *constituyentes* que pueden formarse a partir de los símbolos s, t, etc., es decir, a partir de todos los símbolos que representan acontecimientos cuyas probabilidades nos son dadas.

Evidentemente, la de arriba será la expresión completa de la relación buscada. Pues determina completamente el suceso *W*, representado por el único símbolo *w*, como una función o combinación de los sucesos representados similarmente por los símbolos *s*, *t*, etc. y señala o indica por las leyes del Cálculo de la Lógica la condición

$$D = 0,$$

como conectando entre sí los sucesos *s*, *t*, etc. Podemos, por tanto, por el Principio VI, considerar a *s*, *t*, etc., como sucesos *simples*, de los que la combinación *w* y la condición con la que se asocia *D*, están determinados definitivamente.

Siendo deseable una uniformidad en los procedimientos lógicos de reducción, estableceré aquí el orden que generalmente se seguirá.

12. Por (VIII. 8) se pueden reducir las primitivas ecuaciones a las formas:

$$\begin{aligned} &s(1-S)+S(1-s)=0\,; \\ &t(1-T)+T(1-t)=0\,; \qquad (1) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &w(1-W)+W(1-w)=0\,; \end{aligned}$$

bajo las cuales pueden sumarse sin perjudicar su significado. Podemos entonces eliminar los símbolos *x*, *y*, *z*, separadamente o a un tiempo. Si se escoge hacerlo a un tiempo es necesario, después de sumar las ecuaciones del sistema, desarrollar el resultado con referencia a todos los símbolos que han de ser eliminados e igualar a 0 el producto de todos los coeficientes de los constituyentes (VII. 9).

Como *w* es el símbolo cuya expresión se busca, podemos también, por la Proposición III, Capítulo IX, expresar el resultado de la eliminación de la forma

$$Ew + E'(1-w) = 0.$$

estando *E* y *E'* determinadas sucesivamente haciendo en el sistema general (1) que w = 1 y w = 0 y eliminando los símbolos *x*, *y*, *z*,... Así, las ecuaciones simples de las que se han de determinar *E* y E' respectivamente se convierten en

$$\begin{aligned} &s(1-S)+S(1-s)+t(1-T)+T(1-t)\,..+1-W=0\,; \\ &s(1-S)+S(1-s)+t(1-T)+T(1-t)+W=0. \end{aligned}$$

A partir de aquí sólo queda ya eliminar *x*, *y*, *z*, etc., y determinar *w* por medio de un desarrollo subsecuente. En el proceso de eliminación podemos, si fuera necesario, beneficiarnos de las simplificaciones de las Proposiciones I y II del capítulo IX.

13. Si los datos, además de informarnos de las probabilidades de los sucesos, establecieran cualquier conexión explícita entre ellos, tal conexión debe expresarse lógicamente, y la ecuación o ecuaciones así formadas deben introducirse en el sistema general.

PROPOSICION IV

14. *Dadas las probabilidades de cualquier sistema de sucesos, determinar por un método general, la probabilidad consiguiente o derivada de cualquier otro suceso.*

Como en la última Proposición, sean S, T, etc., los sucesos cuyas probabilidades se nos dan, W el suceso cuya probabilidad se busca, siendo estas funciones conocidas de x, y, z, etc. Representemos los datos así:

Probabilidad de $S = p$;
Probabilidad de $T = q$; (1)

etc., siendo p, q, etc., valores numéricos conocidos. Si entonces representamos el suceso compuesto S por s, T por t y W por w, hallamos por la última proposición

$$w = A + 0\,B + \frac{0}{0}\,C + \frac{1}{0}\,D; \qquad (2)$$

Siendo A, B, C y D funciones de s, t, etc. Además los datos (1) se transforman en:

Probabilidad $s = p$, probabilidad $t = q$, etc.

Ahora bien, la ecuación (2) es descomponible en el sistema

$$\left.\begin{aligned} w &= A + qC \\ D &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &(3)\\ &(4) \end{aligned}$$

siendo q un símbolo de clase indefinida (VI. 12). Pero como por las propiedades de los constituyentes (V. Proposición III) tenemos

$$A + B + C + D = 1,$$

la segunda ecuación del sistema anterior se puede expresar en la forma

$$A + B + C = 1.$$

Si representamos la función $A + B + C$ por V, el sistema (4) será

$$w = A + qC; \qquad (5)$$
$$V = 1. \qquad (6)$$

Consideremos por un momento este resultado. Puesto que V es la suma de una serie de constituyentes de s, t, etc., representa el suceso compuesto en el que los sucesos simples contenidos son aquellos indicados por s, t, etc. Por lo tanto (6) muestra que los sucesos indicados por s, t, etc., cuyas probabilidades son p, q, etc., tienen tales probabilidades no como *sucesos independientes* sino como sucesos sujetos a cierta condición V.

La ecuación (5) expresa w como una combinación de los mismos sucesos similarmente adicionada.

Ahora bien, por el Principio VI, la manera por la que hemos obtenido este

conocimiento de la conexión de los sucesos no influencia la forma en que va a ser utilizada una vez conseguida. Debemos razonar como si la experiencia nos hubiera presentado los sucesos *s, t,* etc., como sucesos simples, libres de entrar en cualquier combinación, pero poseyendo, cuando están realmente bajo la condición *V,* las probabilidades *p, q,* etc., respectivamente.

Sean pues *p´, q´*... las probabilidades correspondientes de tales sucesos, cuando se prescinde de la restricción *V*. Entonces, por la Proposición II de este capítulo, estas cantidades estarán determinadas por el sistema de ecuaciones

$$\frac{[V_s]}{[V]} = p, \quad \frac{[V_t]}{[V]} = q, \text{ \&c.;} \tag{7}$$

y por la Proposición I, la probabilidad del suceso *w* bajo la misma condición *V* será

$$\text{Prob. } w = \frac{[A + cC]}{[V]}; \tag{8}$$

en donde *Vs* denota la suma de aquellos constituyentes en *V* de los que *s* es un factor, y *Vs* lo que esa suma es cuando *s, t,* ..., se cambián por *p', q',* ... respectivamente. La constante *c* representa la probabilidad del suceso indefinido *q;* es, por lo tanto, arbitraria y admite cualquier valor de 0 a 1.

Ahora bien, se observará que los valores de *p,´ q,´* etc. están determinados a partir de (7) sólo a fin de que puedan ser sustituidos en (8) para hacer de la probabilidad *w* una función de cantidades conocidas, *p, q,* etc. Es obvio, por lo tanto, que en vez de las letras *p', q',* etc. podríamos utilizar cualesquiera otras como *s, t,* etc., en las mismas acepciones *cuantitativas.* Este paso particular implicaría simplemente un cambio de significado de los símbolos *s, t,* etc. –su cesar de ser *lógicos* y su convertirse en *cuantitativos.* Los sistemas (7) y (8) serían entonces:

$$\frac{V_s}{V} = p, \quad \frac{V_t}{V} = q, \text{ \&c.;} \tag{9}$$

$$\text{Prob. } w = \frac{A + cC}{V}. \tag{10}$$

Empleando estos símbolos, sólo es necesario determinar a partir de (9) *s, t,* etc., considerados como símbolos cuantitativos, en términos de *p, q,* etc., y sustituir los valores resultantes en (10). Es evidente que *s,t,* etc., en tanto en cuanto representan *probabilidades*, serán fracciones positivas.

El sistema (9) puede expresarse más simétricamente en la forma

$$\frac{V_s}{p} = \frac{V_t}{q} \ldots = V. \tag{11}$$

O podemos expresar tanto (9) como (10) en el sistema simétrico

$$\frac{V_s}{p} = \frac{V_t}{q} \cdot \cdot = \frac{A + cC}{u} = V; \qquad (12)$$

en donde u representa la Probabilidad w.

15. Nos queda por interpretar la constante c que representa la probabilidad del suceso indeterminado q. Ahora bien, la ecuación lógica

$$w = A + qC,$$

interpretada al revés implica que si ora el suceso A tiene lugar, o el suceso C en conexión con el suceco q, el suceso u ocurrirá, y no de otra manera. Así que q representa aquella condición bajo la cual, si el suceso C ocurre, el suceso w ocurrirá. Pero la probabilidad de q es c. Entonces, por lo tanto, c = probabilidad de que si el suceso C ocurre el suceso w también ocurrirá.

Y por lo tanto, por el Principio II,

$$c = \frac{\text{probabilidad del acaecimiento conjunto de } C \text{ y } w}{\text{probabilidad de } C}$$

Podemos determinar la naturaleza de esta nueva experiencia de la que puede obtenerse el valor efectivo de c. Pues, si sustituimos en C *s, t,* etc. por sus expresiones originales como funciones de los sucesos simples x, y, z, etc., formaremos la expresión de aquel suceso cuya probabilidad constituye el denominador del valor anterior de c; y si multiplicamos esa expresión por la expresión original de w, formaremos la expresión de aquel suceso cuya probabilidad constituye el numerador de c y *la proporción entre la frecuencia de este suceso y la del primeri, determinada por medio de nuevas observaciones,* brindará el valor de c. Resaltemos aquí que la constante c no aparece *necesariamente* en la solución de un problema. Sólo cuando los datos son insuficientes para determinar la probabilidad buscada se presenta este elemento arbitrario y en este caso se ve que la ecuación lógica final (2) ó (5) nos informa de cómo ha de determinarse.

Si aquella experiencia nueva por la que puede determinarse c no puede obtenerse, todavía podemos, asignando a c sus valores límite 0 y 1, determinar los límites de la probabilidad de w. Estos son:

$$\text{Límine menor de Probabilidad } w = \frac{A}{V}.$$

$$\text{Límite superior } = \frac{A + C}{V}.$$

Entre estos límites, es seguro que la probabilidad buscada debe estar independientemente de toda nueva experiencia que no se oponga totalmente a la pasada.

Si la expresión del suceso C está formada por muchos constituyentes, siendo el valor lógico de w de la forma:

$$w = A + \frac{0}{0} C_1 + \frac{0}{0} C_2 + \&c.,$$

podemos, en vez de utilizar su conjunto como antes, presentar la solución final así:

$$\text{Prob. } w = \frac{A + c_1 C_1 + c_2 C_2 + \&c.}{V}.$$

Aquí c_1 = probabilidad de que si ocurre el suceso C_1, el suceso w ocurrirá, y lo mismo para los demás. La conveniencia ha de decidir que forma se prefiere.

16. La de arriba es la solución teórica completa del problema propuesto. Podemos añadir que podemos aplicarla igualmente al caso en el que cualquiera de los sucesos mencionados en su exposición original estén condicionados. Así, si uno de los datos es la probabilidad p de que si el suceso x ocurre, el suceso y ocurrirá, si la probabilidad del acaecimiento de x no nos es proporcionada, debemos asumir que la probabilidad $x = c$ (una constante arbitraria), entonces, la probabilidad $xy = cp$, y estas dos condiciones deben introducirse en los datos, y emplearse de acuerdo con el método anterior. Además, si se busca determinar la probabilidad de que si un suceso x acaece un suceso y ocurrirá, también la solución tendrá esta forma

$$\text{Probabilidad buscada} = \frac{\text{Probabilidad } xy}{\text{Probabilidad } x}$$

debiéndose determinar separadamente el numerador y el denominador por medio del anterior método general.

17. Con los resultados de estas investigaciones podemos establecer una regla para la solución de problemas de probabilidades.

REGLA GENERAL

Caso I.– *Cuando todos los sucesos son incondicionados.*

Formar las expresiones simbólicas de los sucesos cuyas probabilidades son dadas o buscadas.

Igualar aquellas expresiones relacionadas con sucesos compuestos con una nueva serie de símbolos, s, t, etc., que representan los sucesos no como compuestos sino como simples, con aquellas expresiones con las que han sido igualadas.

Eliminar de las ecuaciones así formadas todos los símbolos lógicos, excepto aquellos que expresan los sucesos s, t, etc., cuyas respectivas probabilidades p, q, etc., son dadas, o el suceso w cuya probabilidad se busca y determinar w como una función desarrollada de s, t, etc., de la forma

$$w = A + 0B + \frac{0}{0} C + \frac{1}{0} D.$$

Hagamos que $A + B + C = V$, y represente Vs el conjunto de aquellos constituyentes de V que tienen s como factor, V_t aquellos que tienen a t como factor y así para todos los símbolos cuyas probabilidades son dadas.

Entonces, pasando de la lógica al álgebra, formar las ecuaciones

$$\frac{V_s}{p} = \frac{V_t}{q} = V, \qquad (1)$$

$$\text{Prob. } w = \frac{A + cC}{V},$$

a partir de (1) determinar s, t, etc., como funciones de p, q, etc., y sustituir sus valores en (2). El resultado expresará la solución buscada.

O formar el sistema simétrico de ecuaciones

$$\frac{V_s}{p} = \frac{V_t}{q} \cdot \cdot = \frac{A + cC}{u} = \frac{V}{1}, \qquad (2)$$

donde u representa la probabilidad buscada. Si c aparece en la solución su interpretación será

$$c = \frac{\text{Prob. } Cw}{\text{Prob. } c}, \qquad (3)$$

y esta interpretación indica la naturaleza de la experiencia que es necesaria para su descubrimiento.

Caso II.— *Cuando algunos de los sucesos son condicionados.*

Si se diera la probabilidad p de que si ocurre el suceso X, el suceso Y ocurrirá, y si la probabilidad del antecedente X no se nos da, resolver la proposición en las dos siguientes, a saber:

Probabilidad de X = c,

Probabilidad de XY = cp.

Si el quaesitum es la probabilidad de que si el suceso W ocurre, el suceso Z ocurrirá, determinar separadamente, por el caso anterior, los términos de la fracción

$$\frac{\text{Prob. } WZ}{\text{Prob. } W},$$

y la fracción misma expresará la probabilidad buscada.

Se entiende en este caso que X, Y, W, Z, pueden ser cualesquiera sucesos compuestos. Las expresiones XY y WZ representan los productos de las expresiones simbólicas de X e Y y de W y Z, formados de acuerdo con las reglas del Cálculo de la Lógica.

La determinación de la única constante c en ciertos casos puede resolverse en, o sustituirse por, la determinación de una serie de constantes arbitrarias c_1, c_2 ..., según nos convenga y tal como ha sido explicado antes.

18. Se ha dicho (I. 12) que hay dos definiciones distintas, o modos de concepción, sobre los que puede hacerse depender la teoría de las probabilidades, uno de ellos conectada más directamente con el Número y la otra con la Lógica. Hemos considerado ahora las consecuencias que manan de la definición numérica, y hemos mostrado cómo nos lleva a un punto en el que la necesidad de una conexión con la Lógica, se sugiere claramente por sí misma. Hemos visto, en cierta medida, cual es la naturaleza de aquella conexión; y además, de qué manera los procesos propios de la Lógica y los más familiares del Algebra cuantitativa, están dentro del mismo método general de solución, cumpliendo cada uno de ellos de tal manera su objetivo que los dos procesos pueden ser considerados como suplementarios el uno del otro. Nos resta establecer el orden de investigación contrario y, partiendo de una definición de la probabilidad en la que se contiene más directamente la relación lógica, mostrar cómo surgiría entonces la definición numérica y cómo el mismo método general, dependiente igualmente de ambos elementos, sería finalmente establecido, pero con un orden diferente en el procedimiento.

Que entre las expresiones simbólicas del cálculo lógico y las de Algebra se da una gran analogía, es un hecho al que se le ha prestado atención frecuentemente en el curso de este tratado. Incluso puede decirse que poseen una comunidad de formas, y en un grado bastante considerable, una comunidad de leyes. Con una sola excepción en el último respecto, su diferencia estriba sólo en la interpretación. Así, la misma expresión admite una interpretación lógica o una interpretación cuantitativa, según el significado particular que demos a los símbolos que involucra. La expresión xy representa, bajo la primera condición, un acaecimiento conjunto de los sucesos indicados por x e y; bajo la última condición, el producto de los números o cantidades indicadas por x e y. Y así toda expresión que denota un suceso, simple o compuesto, admite un significado puramente cuantitativo, bajo otro sistema de interpretación. Surge entonces aquí la cuestión de si existe algún principio de transición, de acuerdo con el cual las interpretaciones lógicas y numéricas de la misma expresión simbólica tengan una conexión inteligible. Las consideraciones siguientes darán una respuesta a esta cuestión.

19. Concédasenos que existe un sentimiento tal como la expectativa, un sentimiento cuyo objeto es el acaecimiento de sucesos y que admite diferentes grados de intensidad. Concédase también que este sentimiento de expectativa acompaña a nuestro conocimiento de las circunstancias bajo las que se producen los sucesos, y que varía con el grado y clase de ese conocimiento. Entonces, sin asumir, ni presuponer tácitamente, que la intensidad de la expectativa considerada como una emoción mental, admite una medida numérica precisa, es totalmente legítimo preguntarse por la posibilidad de un modo de estimación numérica que, al menos, satisfaga estas condiciones, a saber, que el valor numérico que asigna, crecerá

cuando las circunstancias conocidas de un suceso se vean como justificantes de una expectativa más fuerte, disminuirá cuando exigen una expectativa más débil y permanecerá constante cuando requieren obviamente un grado de expectativa igual.

Ahora bien, estas condiciones se cumplirán al menos, si consideramos principio fundamental de la expectativa al siguiente, a saber, que las leyes para la expresión de la expectativa consideradas como un elemento numérico, serán las mismas que las leyes para la expresión del suceso esperado considerado como un elemento lógico. Así si $\phi\,(x, y, z)$ representa un suceso incondicional compuesto de cualquier modo por los sucesos x, y, z, hagamos que la misma expresión $\phi\,(x, y, z)$, de acuerdo con el principio anterior, denote la expectativa de ese suceso; x, y, z, ya no representarán los sucesos simples implicados, sino las expectativas de aquellos sucesos.

Porque, en primer lugar, es evidente que, bajo esta hipótesis, la probabilidad del acaecimiento de algún suceso de un grupo de sucesos excluyentes mutuamente, será igual a la suma de las probabilidades separadas de aquellos sucesos. Así pues, si la modificación en cuestión consiste en n sucesos mutuamente excluyentes cuyas expresiones son:

$$\phi_1(x, y, z), \quad \phi_2(x, y, z), \ldots . \phi_n(x, y, z),$$

la expresión de ese cambio será

$$\phi_1(x, y, z) + \phi_2(x, y, z) \ldots + \phi_n(x, y, z) = 1\,;$$

siendo los símbolos literales x, y, z, lógicos y haciendo referencia a los sucesos simples de los que se componen las tres alternativas y, por hipótesis, la expresión de la probabilidad de que alguna de esas alternativas ocurrirá es:

$$\phi_1(x, y, z) + \phi_2(x, y, z) \ldots + \phi_n(x, y, z),$$

x, y, z, indican aquí las probabilidades de los sucesos simples de arriba. Ahora bien, esta expresión aumenta, *caeteris paribus*, con el aumento del número de las alternativas involucradas, y disminuye con la disminución de su número; lo que está de acuerdo con la condición establecida..

Además, si partimos de la hipotética definición anterior de la medida de la probabilidad, seremos llevados, o por deducción necesaria o por una serie de pasos sucesivos sugeridos que puede llamarse *necesaria* a la definición numérica admitida. Inmediatamente nos vemos obligados a reconocer la unidad (1) como la adecuada medida numérica de la certeza. Pues es seguro que cualquier suceso x o su contrario $1 - x$ ocurrirá. La expresión de esta proposición es:

$$x + (1 - x) = 1,$$

De donde, por hipótesis, $x + (1 - x)$, la medida de la probabilidad de la proposición de arriba se convierte en la medida de la certeza. Pero el valor de esa expresión es 1, cualquiera que sea el valo particular de x. La unidad, ó 1, es por lo tanto, desde la hipótesis en cuestión, la medida de la certeza.

Haya a continuación n sucesos mutuamente excluyentes pero igualmente posibles, que representaremos por t_1, t_2, ... t_n. La proposición que afirma que alguno de ellos deberá ocurrir, será expresada por la ecuación

$$t_1 + t_2 \ldots + t_n = 1;$$

y, como cuando pasamos, de acuerdo con el razonamiento de la última sección, a probabilidades numéricas, la misma ecuación permanece verdadera en cuanto a la forma, y como las probabilidades t_1, $t_2 \ldots t_n$ son iguales, tenemos

$$nt_1 = 1,$$

de donde $t_1 = \frac{1}{n}$, y similarmente $t_2 = \frac{1}{n}$, $t_n = \frac{1}{n}$. Supongamos entonces que se nos pide determinar la probabilidad de que algún suceso de las series parciales t_1, $t_2 \ldots t_m$ ocurrirá; tenemos para la expresión buscada:

$$t_1 + t_2 \ldots + t_m = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \ldots \text{ hasta } m \text{ términos}$$

$$= \frac{m}{n}.$$

De aquí, por lo tanto, que si hay m casos favorables al acaecimiento de una determinada alternativa de sucesos a partir de n casos posibles e igualmente probables, la probabilidad del acaecimiento de esa alternativa se expresará con la fracción $\frac{m}{n}$.

Ahora bien, el acaecimiento de cualquier suceso que puede ocurrir en formas diferentes e igualmente posibles, es realmente equivalente al acaecimiento de una modificación, es decir, de alguna de una serie de alternativas. Entonces, la probabilidad, del acaecimiento de un suceso puede expresarse por una fracción cuyo numerador representa el número de casos favorables a su acaecimiento y cuya denominador el número total de casos igualmente posibles. Pero ésta es la definición numérica rigurosa de la medida de la probabilidad. Esa definición está por tanto contenida en la definición más propiamente *lógica*, cuyas consecuencias nos hemos esforzado en hallar.

20. A partir de las investigaciones anteriores, se hace patente, primero, que tanto si partimos de la definición numérica corriente de la medida de la probabilidad, o de la definición que asigna a la medida numérica de la probabilidad una ley de valor capaz de establecer una identidad formal entre las expresiones lógicas de los sucesos y las expresiones algebraicas de sus valores, seremos conducidos al mismo sistema de resultados prácticos; segundo, que cualquiera de estas definiciones llevada hasta sus consecuencias y considerada en conexión con las relaciones que inseparablemente involucra, nos lleva, por deducción o sugerencia, a la otra definición. Para una consideración cientifica de la teoría de las probabilidades es esencial que ambos principios sean considerados conjuntamente, en su mutuo alcance y dependencia.

CAPITULO XVIII

EJEMPLOS ELEMENTALES DEL METODO GENERAL EN LAS PROBABILIDADES

1. Se pretende ilustrar aquí, por medio de ejemplos elementales, el método general demostrado en el último capítulo. Los ejemplos escogidos serán principalmente tales que por su simplicidad permitan una fácil verificación de las soluciones obtenidas. Pero aparecerán algunas indicaciones de un tipo de problemas más elevado, que se considerarán más detalladamente después, cuyo análisis resultaría incompleto sin la ayuda de un método distinto que determine las condiciones necesarias entre sus datos, a fin de que puedan representar una experiencia posible y que asigne los correspondientes límites de las soluciones finales. La consideración más completa de aquel método y de sus aplicaciones se reserva para el próximo capítulo.

2. Ejemplo 1.– La probabilidad de que truene un día determinado es p, la probabilidad de que truene y granice es q, pero de la conexión de los dos fenómenos del trueno y el granizo nada más se supone que se conoce. Se pide la probabilidad de que granice en el día propuesto.

Represente x el suceso *truena*.

Represente y el suceso *graniza*.

Entonces xy representará el suceso truena y graniza; y los datos del problema son

$$\text{Prob. } x = p, \quad \text{Prob. } xy = q.$$

No habiendo aquí más que un suceso compuesto xy involucrado, asumamos, de acuerdo con la regla

$$xy = u. \tag{1}$$

Entonces, nuestros datos son

$$\text{Prob. } x = p, \quad \text{Prob. } u = q; \tag{2}$$

y se pide hallar la probabilidad y. Ahora bien (1) da

$$y = \frac{u}{x} = ux + \frac{1}{0}\, u(1 - x) + 0\ (1 - u)\ x + \frac{0}{0}(1 - u)\ (1 - x).$$

De aquí (XVII. 17) hallamos

$$V = ux + (1 - u)\, x + (1 - u)\,(1 - x),$$
$$V_x = ux + (1 - u)\, x = x, \qquad V_u = ux;$$

y las ecuaciones de la Regla general, a saber

$$\frac{V_x}{p} = \frac{V_u}{q} = V.$$

$$\text{Prob. } y = \frac{A + cC}{V}$$

se transforman, al sustituir, y observando que $A = ux$, $C = (1 - u)\,(1 - x)$, y que V se reduce a $x + (1 - u)\,(1 - x)$, en

$$\frac{x}{p} = \frac{ux}{q} = x + (1 - u)\,(1 - x), \tag{3}$$

$$\text{Prob. } y = \frac{ux + c\,(1 - u)\,(1 - x)}{x + (1 - u)\,(1 - x)}, \tag{4}$$

de donde rápidamente deducimos, por eliminación de x y u

$$\text{Prob. } y = q + c\,(1 - p). \tag{5}$$

En este resultado c representa la probabilidad desconocida de que si el suceso $(1 - u)(1 - x)$ sucede, el suceso y ocurrirá. Ahora bien, $(1 - u)(1 - x) = (1 - xy)$ $(1 - x) = 1 - x$ al multiplicar. De aquí, c es la probabilidad desconocida de que si no truena, granizará.

La solución general (5) puede, por lo tanto, interpretarse como sigue: La probabilidad de que granice es igual a la probabilidad de que truene y granice, q, junto con la probabilidad de que no truene, $1 - p$, multiplicado por la probabilidad c de que, si no truena, granizará. Y un razonamiento común verifica este resultado.

Si c no puede determinarse numéricamente hallamos, al adjudicarle los valores límites 0 y 1, los siguientes límites de la probabilidad y, a saber:

Límite inferior $= q$.
Límite superior $= q + 1 - p$.

3. Ejemplo 2.— La probabilidad de que uno o los dos de entre dos sucesos ocurran es p, y q la de que uno o ambos no ocurran. ¿Cuál es la probabilidad de que sólo uno de estos ocurra?

Representen x e y los respectivos sucesos, entonces los datos son

$$\text{Prob. } xy + x\ (1-y) + (1-x)\,y = p,$$
$$\text{Prob. } x(1-y) + (1-x)\,y + (1-x)\ (1-y) = q;$$

y tenemos que hallar

$$\text{Prob. } x(1-y) + y(1-x).$$

siendo aquí todos los sucesos compuestos, hagamos

$$xy + x(1-y) + (1-x)\,y = s,$$
$$x(1-y) + (1-x)\,y + (1-x)\,(1-y) = t,$$
$$x(1-y) + (1-x)\,y = w.$$

Entonces, eliminando x e y y determinando w como una función desarrollada de s y t hallamos

$$w = st + 0\ s(1-t) + 0\ (1-s)\,t + \frac{1}{0}\,(1-s)\ (1-t).$$

Entonces, $A = st$, $C = 0$, $V = st + s(1-t) + (1-s)\,t = s + (1-s)\,t$, $V_s = s$, $V_t = t$; y las ecuaciones de la Regla General (XVII. 17) se transforman en

$$\frac{s}{p} = \frac{t}{q} = s + (1-s)\,t, \qquad (1)$$

$$\text{Prob. } w = \frac{st}{s + (1-s)\,t};$$

de donde hallamos, al eliminar s y t

$$\text{Prob. } w = p + q - 1.$$

Por lo tanto, p + q − 1 es la medida de la probabilidad buscada. Este resultado puede verificarse así: Dado que p es la probabilidad de que uno o los dos sucesos dados ocurran, 1 − p será la probabilidad de que ambos no sucedan; y puesto que q es la probabilidad de que uno o ambos no ocurran, 1 − q es la probabilidad de que ambos ocurran. Así, 1 − p + 1 − q, o 2 − p − q es la probabilidad de que ambos sucedan o de que ambos no ocurran. Pero la única alternativa posible que nos queda es que suceda uno solo de los sucesos. Así, la probabilidad de este acaecimiento es 1 − (2 − p − q) o p + q − 1, como arriba.

4. Ejemplo 3.— La probabilidad de que un testigo A diga la verdad es p, la probabilidad de que otro testigo B diga la verdad es q, y la probabilidad de que no estén de acuerdo en una declaración es r. ¿Cuál es la probabilidad de que si están de acuerdo su declaración sea verdadera?

Represente x la hipótesis de que A dice la verdad; y que B dice la verdad; entonces, la hipótesis de que A y B no estén de acuerdo en su declaración estará representada por x(1 − y) + y(1 − x) y la hipótesis de que estén de acuerdo por xy + (1−x)

(1–y) y la hipótesis de que concuerden en la verdad por xy. De aquí que tengamos los datos siguientes

$$\text{Prob. } x = p, \quad \text{Prob. } y = q, \quad \text{Prob. } x(1-y) + y(1-x) = r,$$

de los que hemos de determinar

$$\frac{\text{Prob. } xy}{\text{Prob. } xy + (1-x)(1-y)}.$$

Pero como la probabilidad $x(1-y) + y(1-x) = r$, es evidente que la probabilidad $xy + (1-x)(1-y)$ será $1 - r$; tenemos, por tanto, que buscar

$$\frac{\text{Prob. } xy}{1-r}.$$

Ahora bien, estando así expresados los sucesos compuestos implicados, $x(1-y) + y(1-x)$ y xy, hagamos

$$\left.\begin{aligned} x(1-y) + y(1-x) &= s \\ xy &= w \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Nuestros datos son entonces la probabilidad $x = p$, probabilidad $y = q$, probabilidad $s = r$, y debemos encontrar la probabilidad w.

El sistema (1) da, al reducir

$$\{x(1-y) + y(1-x)\}(1-s) + s\{xy + (1-x)(1-y)\} + xy(1-w) + w(1-xy) = 0;$$

de donde

$$\begin{aligned} w = \frac{x(1-y)(1-s) + y(1-x)(1-s) + sxy + s(1-x)(1-y) + xy}{2xy - 1} \\ = \frac{1}{0}xys + xy(1-s) + 0x(1-y)s + \frac{1}{0}x(1-y)(1-s) \\ + 0(1-x)ys + \frac{1}{0}(1-x)(1-y)s + \frac{1}{0}(1-x)\,y(1-s) \\ + 0(1-x)(1-y)(1-s). \end{aligned} \qquad (2)$$

En la expresión de este desarrollo se ha hecho que el coeficiente $\frac{1}{0}$ sustituya cada forma equivalente (X.6). De aquí tenemos

$$V = xy(1-s) + x(1-y)s + (1-x)ys + (1-x)(1-y)(1-s);$$

de donde, pasando de la Lógica al Algebra

$$\frac{xy\,(1-s)+x\,(1-y)\,s}{p}=\frac{xy\,(1-s)+(1-x)\,ys}{q}$$

$$=\frac{x\,(1-y)\,s+(1-x)\,ys}{r}$$

$$=xy\,(1-s)+x\,(1-y)\,s+(1-x)\,ys+(1-x)\,(1-y)\,(1-s).$$

$$\text{Prob. } w=\frac{xy\,(1-s)}{xy\,(1-s)+x\,(1-y)\,s+(1-x)\,ys+(1-x)\,(1-y)\,(1-s)},$$

de lo que fácilmente deducimos

$$\text{Prob. } w=\frac{p+q-r}{2};$$

De donde tenemos

$$\frac{\text{Prob. } xy}{1-r}=\frac{p+q-r}{2\,(1-r)} \tag{3}$$

para el valor buscado.

Si, de la misma manera, buscamos la probabilidad de que si A y B están de acuerdo en su declaración, aquella declaración será falsa, debemos sustituir la segunda ecuación del sistema (1) por la siguiente, a saber

$$(1-x)\,(1-y)=w;$$

la ecuación lógica final será entonces

$$w=\frac{1}{0}xys+0xy\,(1-s)+0x\,(1-y)\,s+\frac{1}{0}x\,(1-y)\,(1-s)$$

$$+0\,(1-x)\,ys+\frac{1}{0}\,(1-x)\,y\,(1-s)+\frac{1}{0}\,(1-x)\,(1-y)\,s \tag{4}$$

$$+(1-x)\,(1-y)\,(1-s);$$

de donde, procediendo como antes, deducimos finalmente

$$\text{Prob. } w=\frac{2-p-q-r}{2}. \tag{5}$$

Por lo tanto, tenemos

$$\frac{\text{Prob. } (1-x)\,(1-y)}{1-r}=\frac{2-p-q-r}{2\,(1-r)} \tag{6}$$

para el valor aquí buscado.

Estos resultados son mutuamente consistentes. Puesto que, dado que es seguro que la declaración conjunta de A y B debe ser o cierta o falsa, los segundos miembros de (3) y (5) deben hacer 1 al sumarlos. Ahora bien, tenemos

$$\frac{p+q-r}{2(1-r)} + \frac{2-p-q-r}{2(1-r)} = 1.$$

Es probable, a partir de la sencillez de los resultados (5) y (6) que puedan ser fácilmente deducidos por la aplicación de principios conocidos; pero hay que hacer ver que no están directamente dentro del ámbito de *métodos* conocidos. El número de datos excede el de los sucesos simples que contienen. El señor Cournot, en su meritoria obra "Exposition de la Théorie des Chances" ha propuesto, en casos como el de arriba, seleccionar de entre las premisas originales diferentes grupos de datos, siendo cada grupo igual en número al de los sucesos simples que involucran, suponer que esos sucesos simples son independientes, determinar separadamente sus probabilidades a partir de los diferentes grupos de datos, y, comparando los diferentes valores así encontrados para los mismos elementos, juzgar hasta dónde está justificada la suposición de su independencia. Este método sólo puede aproximarse a la corrección cuando los sucesos simples mencionados demuestran, de acuerdo con el criterio anterior, que son casi o totalmente independientes; y en las cuestiones de declaración y de juicio bajo las que hemos adoptado tal hipótesis parece dudoso que esté justificado por la experiencia efectiva de los hombres.

5. Ejemplo 4.— A partir de una serie de observaciones hechas durante un periodo de enfermedad general, había una probabilidad p de que una casa tomada al azar en un distrito determinado fuera visitada por la fiebre, una probabilidad q de que lo fuera por el cólera y una probabilidad r de que escapara a ambas enfermedades y no estuviera en malas condiciones sanitarias en cuanto a limpieza y ventilación. ¿Cuál es la probabilidad de que una casa tomada al azar estuviera en malas condiciones sanitarias?

Refiriéndose a cualquier caso, vamos a utilizar los símbolos x, y, z como sigue, a saber

El símbolo x para la visita de la fiebre.

El símbolo y para la visita del cólera.

El símbolo z para condiciones sanitarias deficientes.

Los sucesos cuyas probabilidades se dan están indicados por x, y y $(1 - x)(1 - y)(1 - z)$, siendo z el suceso cuya probabilidad buscamos. Hacer entonces que

$$(1-x)(1-y)(1-z) = w\ ;$$

entonces, nuestros datos son

$$\text{Prob. } x = p, \qquad \text{Prob. } y = q, \qquad \text{Prob. } w = r,$$

y tenemos que encontrar la probabilidad z. Ahora bien

$$z = \frac{(1-x)(1-y)-w}{(1-x)(1-y)}$$

$$= \frac{1}{0}xyw + \frac{0}{0}xy(1-w) + \frac{1}{0}x(1-y)w + \frac{0}{0}x(1-y)(1-w)$$

$$+ \frac{1}{0}(1-x)yw + \frac{0}{0}(1-x)y(1-w) + 0(1-x)(1-y)w$$

$$+ (1-x)(1-y)(1-w). \qquad (1)$$

El valor de V deducido de lo anterior es

$$V = xy(1-w) + x(1-y)(1-w) + (1-x)y(1-w)$$
$$+ (1-x)(1-y)w + (1-x)(1-y)(1-w) = 1-w+w(1-x)(1-y);$$

e, igualmente, reduciendo Vx, Vy, Vw, tenemos

$$V_x = x(1-w), \quad V_y = y(1-w), \quad V_w = w(1-x)(1-y);$$

que proporcionan las ecuaciones algebraicas

$$\frac{x(1-w)}{p} = \frac{y(1-w)}{q} = \frac{w(1-x)(1-y)}{r} = 1-w+w(1-x)(1-y). \quad (2)$$

Con respecto a aquellos términos del desarrollo caracterizados por los coeficientes $\frac{0}{0}$ en vez de agruparlos en un solo término los presentaré, para variar (XVII. 18), de la forma

$$\frac{0}{0}x(1-w) + \frac{0}{0}(1-x)y(1-w); \qquad (3)$$

el valor de la probabilidad z será entonces

$$\text{Prob.}\, z = \frac{(1-x)(1-y)(1-w) + cx(1-w) + c'(1-x)y(1-w)}{1-w+w(1-x)(1-y)}. \quad (4)$$

A partir de (2) y (4) deducimos

$$\text{Prob.}\, z = \frac{(1-p-r)(1-q-r)}{1-r} + cp + c'\frac{q(1-p-r)}{1-r},$$

como la expresión de la probabilidad pedida. Si en este resultado hacemos que $c = 0$, y $c' = 0$, tenemos para el límite inferior de su valor $(1 - p - r)(1 - q - r)/1 - r$, y si hacemos que $c = 1, c' = 1$, obtenemos como límite superior $1 - r$.

6. Parece, al analizar esta solución, que las premisas escogidas eran demasiado defectuosas. Las constantes c y c' así lo indican, y los términos correspondientes (3)

de la ecuación lógica final muestran cómo ha de suplirse la deficiencia. Así, dado que

$$x(1-w) = x\{1-(1-x)(1-y)(1-z)\} = x,$$
$$(1-x)\,y\,(1-w) = (1-x)\,y\{1-(1-x)(1-y)(1-z)\} = (1-x)\,y,$$

vemos que c es la probabilidad de que si cualquier casa fuese visitada por la fiebre, sus condiciones sanitarias eran malas, y que c' es la probabilidad de que si una casa fue visitada por el cólera sin fiebre, sus condiciones sanitarias eran malas.

Si los términos del desarrollo lógico afectado por el coeficiente $\frac{0}{0}$ hubieran sido reunidos juntos como en la exposición directa de la regla general, la solución final habría tomado la siguiente forma

$$\text{Prob. } z = \frac{(1-p-r)(1-q-r)}{1-r} + c\left(p+q-\frac{pq}{1-r}\right)$$

representando aquí c la probabilidad de que si una casa fue visitada por alguna o por las dos enfermedades mencionadas, sus condiciones sanitarias eran malas. Este resultado es perfectamente consistente con el primero y puede ciertamente establecerse formalmente la equivalencia *necesaria* de las diferentes formas de solución presentadas en tales casos.

La solución anterior puede comprobarse en casos particulares. Así pues, tomando la segunda forma, si $c = 1$ tenemos probabilidad $z = 1 - r$, un resultado correcto. Pues si la presencia de la fiebre o el cólera indicaba *con certeza* malas condiciones sanitarias, la probabilidad de que cualquier casa estuviera en un mal estado sanitario sería simplemente igual a la probabilidad de que *no* fuera encontrada en la categoría indicada por z, cuya probabilidad sería, a partir de los datos, $1 - r$. Quizá la comprobación general de la solución anterior sería difícil.

Las constantes p, q y r en la solución anterior están sujetas a las condiciones

$$p + r \leqq 1, \qquad q + r \leqq 1.$$

7. Ejemplo 5.— Dadas las probabilidades de las premisas de un silogismo hipotético, hallar la probabilidad de la conclusión.

Sea ésta la forma del silogismo:

Premisa mayor: si la proposición Y es verdadera, X es verdadera.

Premisa menor: si la proposición Z es verdadera, Y es verdadera.

Conclusión: si la proposición Z es verdadera, X es verdadera.

Supongamos que la probabilidad de la premisa mayor es p y q la de la premisa menor.

Los datos son entonces así, representando la proposición X por x, etc., y tomando c y c' como constantes arbitrarias

$$\text{Prob. } y = c, \qquad \text{Prob. } xy = cp;$$
$$\text{Prob. } z = c', \qquad \text{Prob. } yz = c'q;$$

A partir de las que hemos de determinar

$$\frac{\text{Prob. } xz}{\text{Prob. } z} \quad \text{o} \quad \frac{\text{Prob. } xz}{c'}.$$

Hagamos

$$xy = u, \qquad yz = v, \qquad xz = w;$$

entonces, procediendo de acuerdo con el método usual para determinar w como una función desarrollada de y, z, u y v, los símbolos que corresponden a proposiciones cuyas probabilidades se dan, hallamos

$$\begin{aligned} w = {} & uzvy + 0u\,(1-z)\,(1-v)\,y + 0\,(1-u)\,zvy \\ & + \frac{0}{0}(1-u)\,z\,(1-v)\,(1-y) + 0\,(1-u)\,(1-z)\,(1-v)\,y \\ & + 0\,(1-u)\,(1-z)\,(1-v)\,(1-y) + \text{términos cuyos coeficientes} \\ & \text{son } \frac{1}{0}; \end{aligned}$$

y pasando de la Lógica al Algebra

$$\frac{uzvy + u\,(1-z)\,(1-v)\,y}{cp} = \frac{uzvy + (1-u)\,zvy + (1-u)\,z\,(1-v)(1-y)}{c'}$$
$$= \frac{uzvy + (1-u)\,zvy}{c'q}$$
$$= \frac{uzvy + u\,(1-z)\,(1-v)\,y + (1-u)\,zvy + (1-u)(1-z)\,(1-v)\,y}{c} = V.$$

$$\text{Prob. } w = \frac{uzvy + a\,(1-u)\,z\,(1-v)\,(1-y)}{V},$$

en donde

$$\begin{aligned} V = {} & uzvy + u\,(1-z)\,(1-v)\,y + (1-u)\,zvy + (1-u)\,z\,(1-v)\,(1-y) \\ & + (1-u)\,(1-z)\,(1-v)\,y + (1-u)\,(1-z)\,(1-v)\,(1-y), \end{aligned}$$

la solución de este sistema de ecuaciones da

$$\text{Prob. } w = c'pq + ac'\,(1-q),$$

de donde

$$\frac{\text{Prob. } xy}{c'} = pq + a\,(1 - q),$$

el valor pedido. En esta expresión la constante arbitraria a es la probabilidad de que si la proposición Z es verdadera e Y falsa, X es verdadera. En otras palabras, es la probabilidad de que si la premisa menor es falsa, la conclusión es verdadera.

Esta investigación podría haberse simplificado mucho suponiendo que la proposición Z fuera verdadera y buscando después la probabilidad de X. Los datos hubieran sido simplemente

$$\text{Prob. } y = q, \qquad \text{Prob. } xy = pq;$$

de donde habríamos hallado Prob. $x = pq + a\,(1 - q)$. Es evidente que, bajo las circunstancias esta forma de proceder hubiera sido admisible, pero he preferido deducir la solución por medio de la aplicación del método directo y no condicionado. El resultado es tal que queda verificado por un razonamiento común y no necesita, desde luego, un cálculo para obtenerse. Los métodos generales son más engorrosos cuando se aplican a casos en los que se necesita menos su ayuda.

Obsérvese que el método anterior puede aplicarse igualmente al silogismo categórico, y no sólo al silogismo, sino a toda forma de raciocinio deductivo. Dadas separadamente las probabilidades correspondientes a las premisas de *cualquier* serie de argumentos, siempre es posible por el método anterior determinar la probabilidad consecuente de la verdad de una conclusión extraída legítimamente de tales premisas. No es necesario recordar al lector que la verdad y la exactitud de una conclusión son cosas diferentes.

8. Debe resaltarse especialmente una circunstancia notable que se presenta en tales aplicaciones. Se trata de que proposiciones que son equivalentes, cuando son verdaderas, no son necesariamente equivalentes cuando son consideradas sólo como probables. Ilustraremos este principio con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.— Dada la probabilidad p de la proposición disyuntiva "0 la proposición y es verdadera o las dos proposiciones X e Y son falsas" se pide la probabilidad de la proposición condicional "Si la proposición X es verdadera, Y es verdadera".

Hagamos que las expresiones x e y sean apropiadas para las proposiciones X e Y respectivamente. Entonces tenemos

$$\text{Prob. } y + (1 - x)\,(1 - y) = p,$$

de donde se pide hallar el valor de Prob. xy/Prob. x.

Hagamos

$$y + (1 - x)\,(1 - y) = t. \qquad (1)$$

Eliminando y tenemos

$$(1 - x)(1 - t) = 0.$$

de donde

$$x = \frac{0}{0} t + 1 - t;$$

y procediendo del modo usual

$$\text{Prob. } x = 1 - p + cp. \qquad (2)$$

Donde c es la probabilidad de que si o Y es verdadera, o X e Y son falsas, X es verdadera.

A continuación para hallar la Prob. xy. Hagamos

$$xy = w. \qquad (3)$$

Eliminando y de (1) y (3) tenemos

$$z(1 - t) = 0;$$

de donde, procediendo como antes

$$\text{Prob. } z = cp,$$

teniendo c la misma interpretación que antes. Por lo tanto

$$\frac{\text{Prob. } xy}{\text{Prob. } x} = \frac{cp}{1 - p + cp},$$

para la probabilidad de la verdad de la proposición condicional dada.

Ahora bien, en la ciencia de la Lógica pura que, como tal, sólo hace referencia a la verdad y la falsedad, las anteriores proposiciones disyuntivas y condicionales son equivalentes. Son verdaderas y son falsas conjuntamente. De cualquier forma, a partir de la investigación anterior se ve que cuando la proposición disyuntiva tiene una probabilidad p, la proposición condicional tiene una probabilidad diferente y parcialmente indeterminada cp/1 − p + cp. Sin embargo, estas expresiones son tales que cuando *cualquiera de ellas llega a ser 1 ó 0, la otra toma el mismo valor.* Los resultados son, por lo tanto, totalmente consistentes y la transformación lógica sirve para verificar la fórmula deducida de la teoría de las probabilidades.

El lector comprobará facilmente merced a un análisis similar que si la probabilidad de la proposición condicional se diese como p, la de la proposición disyuntiva sería 1 − c + cp, donde c es la probabilidad arbitraria de la verdad de la proposición X.

9. Ejemplo 7.– Se requiere determinar la probabilidad de un suceso x, habiéndose dado o el primero, o el primero y el segundo, o el primero, segundo y tercero de los siguientes datos, a saber:

PRIMERO.— La probabilidad de que el suceso x ocurra, o de que tan sólo él de los tres sucesos $x, y, z,$ no se dé es p.

SEGUNDO.— La probabilidad de que el suceso y ocurra, o de que tan sólo él de los tres sucesos $x, y, z,$ no se dé, es q.

TERCERO.— La probabilidad de que el suceso z ocurra, o de que él sólo de los tres sucesos $x, y, z,$ *no se dé es* r.

SOLUCION DEL PRIMER CASO

Suponemos aquí que sólo se da el primero de los datos anteriores.

Tenemos entonces

$$\text{Prob. } \{x + (1 - x)\, yz\} = p,$$

Hallar la prob. de x.

Sea

$$x + (1 - x)\, yz = s,$$

entonces, eliminando yz como un sólo símbolo, tenemos

$$x\,(1 - s) = 0.$$

de aquí

$$x = \frac{0}{1 - s} = \frac{0}{0}\, s + 0\,(1 - s),$$

y, por consiguiente, y de acuerdo con la Regla, tenemos

$$\text{Prob. } x = cp, \qquad (1)$$

donde c es la probabilidad de que si x ocurre, o sólo él no ocurre, la primera de las dos alternativas es la que ocurrirá. Los límites de la solución son evidentemente 0 y p.

Parece que esta solución no nos da información más allá de lo que nos hubiera proporcionado por sí solo el sentido común. De todas maneras, es todo lo que el único dato presupuesto aquí nos justifica deducir. Veremos en la próxima solución cómo un incremento de nuestros datos restringe la solución final dentro de unos límites más estrechos.

SOLUCION DEL SEGUNDO CASO

Aquí tomamos como datos las ecuaciones

$$\text{Prob. } \{x + (1 - x)\, yz\} = p,$$
$$\text{Prob. } \{y + (1 - y)\, xz\} = q.$$

Escribamos

$$x + (1 - x)yz = s,$$
$$y + (1 - y)xz = t;$$

A partir de la primera tenemos, por (VIII. 7)

$$\{x + (1 - x)yz\}\ (1 - s) + s\{1 - x - (1 - x)yz\} = 0,$$

o

$$(x + \bar{x}yz)\bar{s} + s\bar{x}(1 - yz) = 0;$$

a condición de que, para simplificar, escribamos $\bar{x}$ por 1 − x, $\bar{y}$ por 1 − y. Ahora bien, escribiendo el valor de 1 − yz en constituyentes, tenemos

$$(x + \bar{x}yz)\bar{s} + s\bar{x}(y\bar{z} + \bar{y}z + \bar{y}\bar{z}) = 0,$$

una ecuación compuesta solamente de términos positivos.

De modo parejo tenemos, a partir de la segunda ecuación

$$(y + \bar{y}xz)\bar{t} + t\bar{y}(x\bar{z} + \bar{x}z + \bar{x}\bar{z}) = 0;$$

y de la suma de estas dos ecuaciones hemos de eliminar y y z.

Si en esa suma hacemos $y = 1, z = 1$, obtenemos el resultado $\bar{s} + \bar{t}$.

Si en la misma suma hacemos $y = 1, z = 0$, obtenemos el resultado

$$x\bar{s} + s\bar{x} + \bar{t}.$$

Si en la misma suma hacemos $y = 0, z = 1$, obtenemos

$$x\bar{s} + s\bar{x} + x\bar{t} + t\bar{x}.$$

Y si, finalmente, en la misma suma hacemos $y = 0,\ z = 0$, hallamos

$$x\bar{s} + s\bar{x} + tx + t\bar{x},\quad \text{o}\quad x\bar{s} + s\bar{x} + t.$$

Estas cuatro expresiones han de multiplicarse entre sí. Ahora bien, la primera y la tercera pueden multiplicarse de la siguiente manera

$$\begin{aligned}&(\bar{s} + \bar{t})\ (x\bar{s} + s\bar{x} + x\bar{t} + t\bar{x})\\ &= x\bar{s} + x\bar{t} + (\bar{s} + \bar{t})\ (s\bar{x} + t\bar{x}) \text{ por (IX. Prop. II.)}\\ &= x\bar{s} + x\bar{t} + \bar{s}\bar{x}t + s\bar{x}\bar{t}.\end{aligned} \qquad (2)$$

Además, la segunda y la cuarta dan por (IX. Prop. I)

$$\begin{aligned}&(x\bar{s} + s\bar{x} + \bar{t})\ (x\bar{s} + s\bar{x} + t)\\ &= x\bar{s} + s\bar{x}.\end{aligned} \qquad (3)$$

Por último, (2) y (3) multiplicadas entre sí dan

$$(x\bar{s} + s\bar{x})\,(x\bar{s} + s\bar{x}\bar{t} + x\bar{t} + t\bar{x}\bar{s})$$
$$= x\bar{s} + s\bar{x}\,(s\bar{x}\bar{t} + x\bar{t} + t\bar{x}\bar{s})$$
$$= x\bar{s} + s\bar{x}\bar{t}.$$

de donde la ecuación final es

$$(1 - s)\,x + s\,(1 - t)\,(1 - x) = 0,$$

y resolviéndola con referencia a x, da

$$x = \frac{s\,(1 - t)}{s\,(1 - t) - (1 - s)}$$
$$= \frac{0}{0} st + s\,(1 - t) + 0\,(1 - s)\,t + 0\,(1 - s)\,(1 - t),$$

y, siguiendo de acuerdo con la Regla, tenemos finalmente

$$\text{Prob. } x = p\,(1 - q) + cpq. \qquad (4)$$

donde c es la probabilidad de que si el suceso st ocurre, x acaecerá. Ahora bien, si formamos la expresión desarrollada de st multiplicando las expresiones para s y t entre sí, hallamos

c = Prob. de que si x e y suceden a la vez, o x y z ocurren a la vez, e y no ocurre, o y y z ocurren a la vez, y x no ocurre, el suceso x ocurrirá.

Los límites de la Prob. x son, evidentemente, p(1 − q) y p. Esta solución es más concreta que la primera, en tanto que contiene un término no afectado por una constante arbitraria.

SOLUCION DEL TERCER CASO

Los datos aquí son

$$\text{Prob. } \{x + (1 - x)\,yz\} = p,$$
$$\text{Prob. } \{y + (1 - y)\,xz\} = q,$$
$$\text{Prob. } \{z + (1 - z)\,xy\} = r.$$

Escribamos como antes $\bar{x}$ por 1 − x, etc, y hagamos

$$x + \bar{x}yz = s,$$
$$y + \bar{y}xz = t,$$
$$z + \bar{z}xy = u.$$

Al reducir por (VIII. 8) obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned}&(x + \bar{x}yz)\bar{s} + s\bar{x}\,(y\bar{z} + \bar{y}z + \bar{y}\bar{z}) \\ &+ (y + \bar{y}xz)\,\bar{t} + t\bar{y}\,(z\bar{x} + x\bar{z} + \bar{x}\bar{z}) \\ &+ (z + \bar{z}xy)\,\bar{u} + u\bar{z}\,(x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}) = 0.\end{aligned} \tag{5}$$

Ahora bien, en vez de eliminar directamente y y z de la ecuación anterior, supongamos, de acuerdo con (IX. Prop. III) que el resultado de aquella eliminación es

$$Ex + E'(1 - x) = 0,$$

entonces hallaremos E haciendo en la ecuación dada $x = 1$, y eliminando y y z de la ecuación resultante, y hallaremos E' haciendo $x = 0$, en la ecuación dada, y eliminando y y z del resultado. En primer lugar, pues, haciendo $x = 1$, tenemos

$$\bar{s} + (y + \bar{y}z)\,\bar{t} + t\bar{y}\bar{z} + (z + y\bar{z})\,\bar{u} + u\bar{y}\bar{z} = 0,$$

y haciendo en el primer miembro de esta ecuación sucesivamente $y = 1, z = 1, y = 1$, $z = 0$, etc, y multiplicando entre sí los resultados, tenemos la expresión

$$(\bar{s} + \bar{t} + \bar{u})\,(\bar{s} + \bar{t} + \bar{u})\,(\bar{s} + \bar{t} + \bar{u})\,(\bar{s} + t + u),$$

que es equivalente a

$$(\bar{s} + \bar{t} + \bar{u})\,(\bar{s} + t + u).$$

Esta es la expresión para E. La mantendremos en su forma actual. Ya se ha mostrado por el ejemplo (VIII.3), que la reducción efectiva de tales expresiones al multiplicar, aunque conveniente, no es necesaria.

Además, haciendo en (5) $x = 0$, tenemos

$$yz\bar{s} + s(y\bar{z} + \bar{y}z + \bar{y}\bar{z}) + y\bar{t} + t\bar{y} + z\bar{u} + u\bar{z} = 0;$$

de la que, por el mismo proceso de eliminación, hallamos para E' la expresión

$$(\bar{s} + \bar{t} + \bar{u})\,(s + \bar{t} + u)\,(s + t + \bar{u})\,(s + t + u).$$

El resultado final de la eliminación de y y z a partir de (5) es, por lo tanto

$$(\bar{s}+\bar{t}+\bar{u})(\bar{s}+t+u)x+(\bar{s}+\bar{t}+\bar{u})(s+\bar{t}+u)(s+t+\bar{u})(s+t+u)(1-x)=0.$$

de donde tenemos

$$x = \frac{(\bar{s} + \bar{t} + \bar{u})\,(s+\bar{t}+u)\,(s+t+\bar{u})\,(s+t+u)}{(\bar{s}+\bar{t}+\bar{u})\,(s+\bar{t}+u)\,(s+t+\bar{u})\,(s+t+u) - (\bar{s} + \bar{t} + \bar{u})\,(\bar{s}+t+u)};$$

o, desarrollando el segundo miembro,

$$x = \frac{0}{0} stu + \frac{1}{0} \bar{s}tu + \frac{1}{0} st\bar{u} + s\bar{t}\bar{u} + \frac{1}{0} \bar{s}tu + 0\bar{s}\bar{t}u + 0\bar{s}t\bar{u} + 0\bar{s}\bar{t}\bar{u}. \tag{6}$$

de donde, pasando de la Lógica al Algebra

$$\frac{stu + s\bar{t}\bar{u}}{p} = \frac{stu + \bar{s}t\bar{u}}{q} = \frac{stu + \bar{s}\bar{t}u}{r} = stu + s\bar{t}\bar{u} + \bar{s}\bar{t}u + \bar{s}t\bar{u} + \bar{s}\bar{t}\bar{u}. \tag{7}$$

$$\text{Prob. } x = \frac{s\bar{t}\bar{u} + cstu}{stu + s\bar{t}\bar{u} + \bar{s}\bar{t}u + \bar{s}t\bar{u} + \bar{s}\bar{t}\bar{u}}. \tag{8}$$

Para simplificar este sistema de ecuaciones, cambiar s/s por s, t/t, por t, etc., y después del cambio hagamos que λ represente a $stu + s + t + 1$. Tenemos entonces

$$\text{Prob. } x = \frac{s + cstu}{\lambda}, \tag{9}$$

con las relaciones

$$\frac{stu + s}{p} = \frac{stu + t}{q} = \frac{stu + u}{r} = stu + s + t + u + 1 = \lambda. \tag{10}$$

De estas ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} stu + s &= \lambda p, \\ stu + s &= \lambda - t - u - 1, \\ \therefore\ \lambda p &= \lambda - u - t - 1, \\ u + t &= \lambda(1 - p) - 1. \end{aligned} \tag{11}$$

Similarmente $u + s = \lambda(1 - q) - 1,$

y $s + t = \lambda(1 - r) - 1.$

A partir de estas ecuaciones hallamos

$$s = \frac{\lambda(1 + p - q - r) - 1}{2}, \qquad t = \frac{\lambda(1 + q - r - p) - 1}{2}, \qquad u = \frac{\lambda(1 + r - p - q) - 1}{2}. \tag{12}$$

Ahora bien, por (10)

$$stu = \lambda p - s.$$

Sustituir en esta ecuación los valores de s, t y u, determinados arriba, y tenemos

$$\begin{aligned}\{(1+p-q-r)\lambda-1\}\{(1+q-p-r)\lambda-1\}\{(1+r-p-q)\lambda-1\} \\ = 4\{(p+q+r-1)\lambda+1\},\end{aligned} \tag{13}$$

una ecuación que determina a λ. Los valores de s, t y u son dados entonces por (12), y su sustitución en (9) completa la solución del problema.

10. Ahora bien, surge aquí una dificultad cuya manifestación clara ante el lector ha sido uno de los fines de esta investigación. Como será determinada qué raiz de la ecuación anterior debería ser tomada para el valor de λ. Se hizo alguna referencia a esta dificultad al empezar este capítulo, y se consideró oportuno reservar su estudio más completo para el siguiente, del que se han extraído los siguientes resultados.

A fin de que los datos del problema puedan extraerse de una experiencia posible, las cantidades p, q y r deben de estar sujetas a las siguientes condiciones

$$\begin{aligned}1+p-q-r &\geqq 0, \\ 1+q-p-r &\geqq 0, \\ 1+r-p-q &\geqq 0.\end{aligned} \tag{14}$$

Además, el valor de λ que ha de emplearse en la solución general, ha de cumplir las siguientes condiciones

$$\lambda \geqq \frac{1}{1+p-q-r}, \quad \lambda \geqq \frac{1}{1+q-p-r}, \quad \lambda \geqq \frac{1}{1+r-p-q}. \tag{15}$$

Ahora bien, estos dos grupos de condiciones bastan para la limitación de la solución general. Puede mostrarse que la ecuación central (13) proporciona un sólo valor de λ que ciertamente satisface estas condiciones, y que ese valor de λ es el que se busca.

Sea $1 + p - q - r$ el menor de los tres coeficientes de λ dados arriba, entonces $1/1 + p - q - r$ será el mayor de aquellos valores por encima del cual vamos a mostrar que existe sólamente un valor de λ. Escribamos (13) de la forma

$$\begin{aligned}\{(1+p-q-r)\lambda-1\}\{(1+q-p-r)\lambda-1\}\{(1+r-p-q)\lambda-1\} \\ -4\{(p+q+r-1)\lambda+1\} = 0;\end{aligned} \tag{16}$$

y representemos el primer miembro por V.

Hagamos $\lambda = 1/1 + p - q - r$; entonces V se convierte en

$$-4\left(\frac{p+q+r-1}{1+p-q-r}+1\right) = -4\left(\frac{2p}{1+p-q-r}\right),$$

que es *negativo*.

Sea $\lambda = \infty$, entonces V es *positivo* e infinito.

Además $$\frac{d^2V}{d\lambda^2} = (1+p-q-r)(1+q-p-r)\{(1+r-p-q)\lambda - 1\}$$
$$+ \text{términos positivos similares},$$

cuya expresión es positiva entre los límites $\lambda = 1/1 + p - q - r$ y $\lambda = \infty$.

Si construimos una curva cuya abscisa sea medida por λ, y cuyas ordenadas lo sean por V, esa curva cruzará, entre los límites especificados, de abajo a arriba a la abscisa λ, siendo su convexidad siempre hacia abajo. Entonces intersectará sólo una vez a la abscisa λ dentro de esos límites; y la ecuación (16) tendrá, por lo tanto, sólo una raiz correspondiente a eso.

Por consiguiente, la solución viene expresada por (9), siendo λ aquella raiz de (13) que satisface las condiciones (15), y siendo dados s, t y u, por (12). Puede deducirse la interpretación de c de la forma usual.

Es manifiesto, a partir de lo anterior, que el problema está, en todos los casos, más o menos indeterminado.

CAPITULO XIX

SOBRE CONDICIONES ESTADISTICAS

1. Por el término condiciones estadísticas entiendo aquellas condiciones que deben conectar los datos numéricos de un problema con el fin de que esos datos sean consecuentes entre sí y de tal índole, por lo tanto, que hubieran podido ser proporcionados por observaciones estadísticas. De hecho, determinar tales condiciones constituye un problema importante, cuya solución, que al menos será suficiente para las necesidades de este trabajo, tengo la intención de llevar a cabo en este capítulo, considerándolo, en parte, como un objeto de especulación independiente, pero también , en parte, como un suplemento necesario a la teoría de las probabilidades, ya ejemplificada hasta cierto punto. La naturaleza de la conexión entre los dos temas puede establecerse así.

2. Hay innumerables ejemplos, y uno de ellos presentado en el capítulo anterior (Ej. 7) en el que la solución de una cuestión en la teoría de las probabilidades depende, finalmente, de la solución de una ecuación algebraica de un grado elevado. En tales casos, la selección de la raiz adecuada debe determinarse por ciertas condiciones, en parte referentes a los valores numéricos asignados en los datos, y en parte a la debida limitación del elemento necesitado.

El descubrimiento de tales condiciones puede a veces llevarse a cabo razonando simplemente. Por ejemplo, si hay una probabilidad p para el acaecimiento de un suceso A, y una probabilidad q para la concurrencia del mencionado suceso A y otro suceso B, está claro que debemos tener

$$p \geqq q.$$

Pero para la determinación *general* de tales relaciones, se necesita un método distinto y vamos a establecerlo a continuación.

En tanto deriva de la experiencia de hecho, la probabilidad de un suceso es el resultado de un proceso de aproximación. Es el límite de la proporción entre número de casos en los que se observa que el suceso ocurre y el número total de casos, igualmente posibles, que la observación recoge, — un límite al que nos acercamos más a medida que aumenta el número de observaciones. Ahora bien,

pongamos que el símbolo n, prefijado a la expresión de cualquier clase, representa el número de individuos comprendidos en esa clase. Así, x representando hombres, y seres blancos, supongamos

nx = número de hombres

nxy = número de hombres blancos

$nx\,(1-y)$ = número de hombres que no son blancos, etc.

De acuerdo con esta notación n (1) representará el número de individuos contenidos en el universo del discurso, y $\frac{n(x)}{n(1)}$ representará la probabilidad de que cualquier ser individual, seleccionado de ese universo indicado por n (1) sea un hombre. Si la observación no nos ha dado a conocer los valores *totales* de $n\,(x)$ y $n\,(1)$ entonces, la probabilidad en cuestión es el límite al que $\frac{n(x)}{n(1)}$ se acerca cuando el número de observaciones individuales n (1) aumenta.

De la misma forma, tal como supondremos generalmente en este capítulo, si x representa un suceso de un determinado tipo, $n\,(x)$ representará el número de acaecimientos de ese suceso, $n\,(1)$ el número de sucesos observados (igualmente probables) de todas clases y $\frac{n(x)}{n(1)}$ o su límite, la probabilidad del acaecimiento del suceso x.

Por lo tanto, está claro que las conclusiones que pueden deducirse respecto a las proporciones de las cantidades $n\,(x)$, $n\,(y)$, $n\,(1)$, etc. pueden convertirse en conclusiones respecto a las probabilidades de los sucesos representados por x, y, etc. Así, si encontrásemos una relación como la siguiente, es decir:

$$n(x) + n(y) < n(1),$$

que expresa que el número de veces en que el suceso x ocurre y el número de veces en que el suceso y ocurre, es menor que el número de acaecimientos posibles $n\,(1)$; podemos entonces deducir la relación

$$\frac{n(x)}{n(1)} + \frac{n(y)}{n(1)} < 1,$$

$$\text{Prob.}\, x + \text{Prob.}\, y < 1.$$

En general, cualesquiera relaciones estadísticas como la anterior, se convertirán en relaciones que conectan las probabilidades de los sucesos implicados, cambiando n (1) por 1, y cualquier otro símbolo n (x) por Prob. x.

3. Entonces, primero investigaremos un método para determinar las relaciones numéricas de clases o sucesos y más particularmente los límites de valor numérico mayor y menor. En segundo lugar, aplicaremos el método a la limitación de las soluciones de problemas en la teoría de las probabilidades.

Es evidente que el símbolo n es distributivo en su operación. Así, tenemos:

$$n\{xy + (1-x)(1-y)\} = nxy + n(1-x)(1-y)$$
$$nx(1-y) = nx - nxy,$$

El número de cosas contenidas en una clase que puede separarse en distintos grupos o porciones es igual a la suma de los números de cosas que se hallan en esas porciones separadas. Es evidente, además, que cualquier expresión formada por los símbolos lógicos x, y, etc. puede desarrollarse o expandirse de cualquier forma que sea consistente con las leyes de los símbolos, y el símbolo n aplicado a cada término del resultado, siempre que cualquier constante multiplicadora que pueda aparecer sea colocada fuera del símbolo n sin afectar al valor del resultado. La expresión $n\,(1)$, caso de aparecer, representará, por supuesto, el número de individuos que hay en el universo. Así:

$$n(1-x)(1-y) = n(1-x-y+xy)$$
$$= n(1) - n(x) - n(y) + n(xy).$$

Además

$$n\{xy + (1-x)(1-y)\} = n(1-x-y+2xy)$$
$$= n(1) - nx - ny + 2nxy).$$

En el último miembro, el término $2nxy$ indica el *doble* del número de individuos que hay en la clase xy.

4. Vamos a investigar ahora los límites númericos de clases cuya expresión lógica nos es dada. En esta investigación los siguientes principios tienen una importancia fundamental:

PRIMERO.– Si todos los miembros de una clase determinada poseen cierta propiedad x, el número total de individuos que hay en la clase x será un límite superior al número de individuos comprendidos en la clase dada.

SEGUNDO.– Se hallará un límite menor del número de individuos en una clase sustrayendo un límite numérico mayor de la clase contraria, $1 - y$, del número de individuos que hay en el universo.

Para ejemplificar estos principios, apliquémoslos al siguiente problema:

PROBLEMA: Dados $n\,(1)$, $n\,(x)$ y $n\,(y)$, hallar los límites superior e inferior de nxy.

Aquí nuestros datos son el número de individuos que hay en el universo del discurso; el número de los contenidos en la clase x y el número de la clase y, y se pide determinar los límites del número contenido en la calse compuesta por los individuos que se encuentran a la vez en la clase x y en la clase y.

Por el Principio I, este número no puede exceder el número comprendido en la clase x, ni puede sobrepasar el número comprendido en la clase y. Su límite mayor será entonces el menor de los dos valores $n(x)$ e (y).

Por el Principio II un límite menor de la clase xy será proporcionado por la expresión:
$n(1)$ – límite mayor de $\{x(1-y) + y(1-x) + (1-x)(1-y)\}$ (1), dado que $x(1-y) + y(1-x) + (1-x)(1-y)$ es el complemento de la clase xy, es decir, lo que falta para completar el universo.

Ahora bien,

$$x(1-y) + (1-x)(1-y) = 1 - y.$$

Por lo tanto, tenemos para (1) $n(1)$ – límite mayor de $\{1 - y + y(1-x)\}$ $= n(1) - n(1-y)$ – límite mayor de $y(1-x)$. (2)

El límite mayor de y (1 – x) es el menor de los dos valores n (y) y n (1 – x). Sea n (y) el menor, entonces (2) se convierte en

$$n(1) - n(1-y) - n(y)$$
$$= n(1) - n(1) + n(y) - n(y) = 0.$$

En segundo lugar, sea $n(1-x)$ menor que $n(y)$, entonces, el límite mayor de $ny(1 - x) = n(1-x)$; por lo tanto (2) pasa a ser así:

$$n(1) - n(1-y) - n(1-x)$$
$$= n(1) - n(1) + n(y) - n(1) + n(x)$$
$$= nx + ny - n(1).$$

El límite menor de nxy es por consiguiente ó 0 ó $n(x) + n(y) - n(1)$, según que $n(y)$ sea menor o mayor que $n(1-x)$, ó, lo que es una condición equivalente, según que $n(x)$ sea mayor o menor que $n(1-y)$.

Ahora bien, como 0 es necesariamente un límite menor del valor númerico de *cualquier* clase, es suficiente tener en cuenta la segunda de las expresiones anteriores para el límite menor de $n(xy)$. Tenemos, por lo tanto,

Límite mayor de $n(xy)$ = menor de los valores $n(x)$ y $n(y)$

Límite menor de $n(xy) = n(x) + n(y) - n(1)$. (21)

PROPOSICION I

5. *Para expresar los límites mayor y menor de una clase representada por cualquier constituyente de los símbolos x, y, z, etc., habiendo dado los valores de n (x), n (y), n (z), etc., y n (1).*

Consideremos primero el constituyente xyz.

Es evidente que el límite numérico mayor será el menor de los valores $n(x)$, $n(y)$, $n(z)$.

El límite numérico menor puede deducirse como en el problema anterior, pero también puede deducirse de la solución de ese problema. Así:

Límite menor de $n(xyz) = n(xy) + n(z) - n(1)$. (1)

Ahora bien, esto significa que $n(xyz)$ es, por lo menos, tan grande como la expresión $n(xy) + n(z) - n(1)$. Pero $n(xy)$ es, al menos, tan grande como $n(x) + n(y) - n(1)$. Por lo tanto, $n(xyz)$ es al menos tan grande como

$$n(x) + n(y) - n(1) + n(z) - n(1),$$

o bien

$$n(x) + n(y) + n(z) - 2n(1).$$

Por consiguiente tenemos:

Límite menor de $n(xyz) = n(x) + n(y) + n(z) - 2n(1)$.

Siguiendo con esta forma de razonamiento, llegaremos a las siguientes conclusiones:

PRIMERO.– El límite numérico mayor de la clase representada por cualquier constituyente será hallado prefijando n separadamente a cada factor del constituyente por separado, y tomando el menor de los valres resultantes.

SEGUNDO.– Se hallará el límite menor sumando todos juntos los valores antes mencionados, y restando del resultado tantas veces, menos una, el valor de $n(1)$.

Entonces tendríamos:

Límite mayor de $nxy(1-z)$ = el menor de los valores nx, ny, y $n(1-z)$.

Límite menor de $nxy(1-z) = n(x) + n(y) + n(1-z) - 2n(1) = nx + n(y) - n(z) - n(1)$.

Al utilizar los símbolos generales quizás sea mejor considerar todos los valores $n(x)$, $n(y)$, $n(1-z)$, como límites mayores de $n\{xy(1-z)\}$, puesto que, de hecho, no puede sobrepasar ninguno de ellos. En las investigaciones siguientes adoptaré este modo de expresión.

PROPOSICION II

6. *Para determinar el límite numérico mayor de una clase expresada por una serie de constituyentes de los símbolos x, y, z, etc., dándose los valores n (x), n (y), n (z), etc., y n (1).*

Evidentemente, una forma de determinar ese límite sería formar la menor suma

posible de los límites mayores de los diferentes constituyentes. Así, un límite mayor de la expresión

$$n\{xy + (1 - x)(1 - y)\}$$

se hallaría sumando el menor de los dos valores nx, ny, proporcionados por el primer constituyente, con el menor de los dos valores $n,(1-x)$, $n\,(1-y)$ proporcionados por el segundo constituyente. Si no sabemos cual es el menor valor en cada caso, debemos formar las cuatro sumas posibles, y rechazar cualesquiera de las que son iguales o sobrepasan a $n\,(1)$. Así, en el ejemplo anterior tendríamos

$$\begin{aligned} nx \quad &+ n(1 - x) = n(1). \\ n(x) &+ n(1 - y) = n(1) + n(x) - n(y). \\ n(y) &+ n(1 - y) = n(1) + n(y) - n(x). \\ n(y) &+ n(1 - y) = n(1). \end{aligned}$$

Rechazando el primero y el último valor, tenemos

$$n(y) + n(x) + n(1 - y), \text{ or } n(1) + n(x).$$

para la expresión buscada, una de las cuales será (a no ser que $nx = ny$) menor que $n\,(1)$, y la otra mayor. Debe tomarse, por supuesto, la menor.

Cuando dos o más de los constituyentes poseen un factor común como x, este factor sólo puede, como es obvio por el Principio I, proporcionar un único término $n\,(x)$ en la expresión final del límite mayor, así, si $n\,(x)$ aparece como un límite mayor en dos o más constituyentes, debemos al sumar esos límites sustituir $nx + nx$ por nx, etc. Tomemos, por ejemplo, la expresión $n\{xy + x(1 - y)z\}$. Los límites mayores de esta expresión proporcionados inmediatamente al sumar, serían:

1. nx.
2. $nx + n(1 - y)$.
3. $nx + n(z)$.
4. $ny + nx$.
5. $ny + n(1 - y)$.
6. $ny + nz$.

De estos sólo el primero y el sexto deben retenerse, siendo el segundo, tercero y cuarto mayores que el primero; y el quinto es igual a $n\,(1)$. Los límites son, por lo tanto,

$$n(x) \text{ y } n(y) + n(z),$$

y de estos dos valores debe de tomarse el último, suponiendo que sea menor que $n\,(1)$.

Todas estas consideraciones nos llevan a la siguiente Regla:

REGLA.– *Tomar un factor de cada constituyente, y prefijarle el símbolo n, sumar los varios términos o resultados así formados, rechazando todas las repeticiones del mismo término; la suma así obtenida será un límite mayor de la expresión, y la menor de todas las sumas será el límite mayor que ha de utilizarse.*

Así, los límites mayores de la expresión

$$xyz + x(1 - y)\ (1 - z) + (1 - x)\ (1 - y)\ (1 - z)$$

serían

$$n(x) + n(1 - y), \quad \text{y} \quad n(x) + n(1 - z),$$
$$n(x) + n(1) - n(y), \text{ y } \quad n(x) + n(1) - n(z).$$

Si comenzásemos con *n (y)*, extraído del primer término, y tomásemos *n (x)* del segundo, deberíamos tomar *n (1–y)* del tercero y esto daría

$$n(y) + n(x) + n(1 - y), \text{ o } \quad n(1) + n(x).$$

Pero como este resultado sobrepasa *n (1)*, que es un obvio límite mayor para *toda* clase, no es necesario tenerlo en cuenta.

PROPOSICION III

7. *Para hallar el límite numérico menor de cualquier clase expresada por constituyentes de los símbolos x, y, z, dándose n (x), n (y), n (z).. n(1).*

Este objetivo puede llevarse a cabo con la aplicación de la Proposición anterior, combinada con el Principio II, pero es mejor utilizar el siguiente método:

Súmense dos constituyentes, que se diferencien entre sí sólo por un único factor, con el fin de formar un solo término de clase como $x(1–y) + xy$ forma x, y habiendo llevado esta especie de agregación tan lejos como sea posible, es decir, habiendo seleccionado de una serie de constituyentes dados el mayor número de sumas de esta clase que puedan formarse y comprendiendo cada suma el mayor número de constituyentes que puedan reunirse en un solo término, sin tener en cuenta si cualquiera de los dichos constituyentes entra en la composición de otros términos, escribamos estos conjuntos finales como términos distintos, junto con aquellos constituyentes que no admiten sumarse en conjunto. Entonces, los diversos límites menores de esos términos, deducidos por la Proposición I, serán los límites menores de la expresión dada y sólo uno de esos límites menores será a la vez positivo.

Así, a partir de la expresión $xy + (1–x)\,y + (1–x)\,(1–y)$, podemos formar los conjuntos y y $1–x$, sumando respectivamente el primero y el segundo término y el segundo y el tercero. De aquí que *n (y)* y *n (1–x)* serán los límites menores de la expresión dada. De nuevo, si las expresiones dadas fueran

$$xyz + x(1 - y)z + (1 - x)yz + (1 - x)\ (1 - y)z + xy(1 - z) + (1 - x)\ (1 - y)\ (1 - z),$$

obtendríamos por la suma de los cuatro primeros términos el único término z, por la suma del primer y quinto término el término único xy, y por la suma del cuarto y sexto término el término único $(1-x)(1-y)$, y no hay otra forma por la que puedan agruparse los constituyentes en términos únicos, y tampoco ha quedado así ningún constituyente al que no se haya tenido en cuenta. Los tres términos resultantes, como límites menores de la expresión dada, dan los valores

$$n(z),\ n(x) + n(y) - n(1),$$

y $$n(1-x) + n(1-y) - n(1),\ \text{or}\ n(1) - n(x) - n(y).$$

8. La comprobación de la regla anterior consiste en la aplicación adecuada de los siguientes principios:

PRIMERO.— El límite menor de un grupo de constituyentes que permiten sumarse en un solo término, será obviamente el límite menor de ese único término. Esto explica la primera parte de la regla.

SEGUNDO.— El límite menor de la suma de cualesquiera dos términos que, o son distintos constituyentes o se componen de distintos constituyentes, pero que no admiten el ser sumados conjuntamente, será la suma de sus límites menores respectivos, si esos límites menores son ambos positivos; pero si uno fuese positivo y el otro negativo, será igual tan sólo al límite menor positivo. Pues si se sumase el negativo, el valor del límite disminuiría, es decir, sería menor para la suma de dos términos que para un solo término. Ahora bien, siempre que dos constituyentes se diferencian en más de un factor, como para no admitir el ser sumados, los límites menores de los dos no pueden ser ambos positivos. Así, sean los términos xyz y $(1-x)(1-y)z$, que se diferencian en dos factores; el límite menor del primero es $n(x+y+z-2)$ y el del segundo $n(1-x+1-y+z-2)$, ó

$$1^{o}\ \ n\{x+y-1-(1-z)\}.\ \ 2^{o}\ \ n\{1-x-y-(1-z)\}.$$

Si n (x + y − 1) es positivo, n (1−x−y) es negativo, y el segundo debe ser negativo. Si n (x + y − 1) es negativo, el primero es negativo; y similarmente para casos en que se da un mayor número de factores. Se puede mostrar de esta forma que, de acuerdo con la manera en que se forman los términos agregados al aplicar la regla, no se pueden sumar dos límites menores de términos distintos, pues o esos términos contendrán algún constituyente común y en tal caso está claro que no podemos sumar sus límites menores, o los límites menores de los dos no serán a la par positivos, en cuyo caso la suma sería inútil.

PROPOSICION IV

9. *Dados los respectivos números de individuos comprendidos en cualesquiera clases s, t, etc., definidas lógicamente, deducir un sistema de límites numéricos de cualquier otra clase w, también definida lógicamente.*

Como este es el problema más general que se pretende discutir en este capítulo, siendo las anteriores investigaciones meramente introductorias, y las que vendrán dedicadas a su aplicación, es deseable establecer claramente su naturaleza y propósito.

Cuando se dice que las clases s, t... w están definidas lógicamente, quiere decirse que son clases definidas de tal modo que nos permiten escribir sus expresiones simbólicas, tanto si las clases en cuestión son simples o compuestas. Por el método general de este tratado, el símbolo *w* puede entonces determinarse directamente como una función desarrollada de los símbolos s, t, etc., en la forma

$$w = A + 0B + \frac{0}{0} C + \frac{1}{0} D, \qquad (1)$$

donde A, B, C y D se forman de los constituyentes de s, t, etc. Consideraremos después cómo de tal expresión pueden determinarse los límites numéricos de *w* de la manera más general. De momento sólo intentamos mostrar hasta donde puede lograrse este objetivo sobre los principios desarrollados en las proposiciones anteriores; siendo una investigación tal suficiente para los propósitos de este trabajo. Para simplificar, basaré mi argumento en el desarrollo particular,

$$w = st + 0s\,(1 - t) + \frac{1}{0}\,(1 - s)\,t + \frac{0}{0}(1 - s)\,(1 - t), \qquad (2)$$

en el que todas las variedades de coeficientes se presentan.

A partir del constituyente (1–s) (1–t), que tiene como coeficiente $\frac{0}{0}$, se puede saber que algunos, ninguno, o todos los miembros de la clase indicada por ese constituyente se encuentran en *w*. Es evidente que *n (w)* tendrá su valor numérico más alto cuando todos los miembros de la clase indicada por (1–s) (1–t) se encuentran en *w*. Además, como ninguno de los individuos que están en las clases denotadas por s (1–t) y (1–s) t se encuentran en *w*, los límites numéricos superiores de *w* serán idénticos a los de la clase *st* + (1–s) (1–t).

Son por lo tanto,

$$ns + n\,(1 - t) \text{ and } nt + n\,(1 - s).$$

De la misma manera un sistema de límites numéricos superiores del desarrollo $A + 0B + \frac{0}{0} C + \frac{1}{0} D$, *puede encontrarse a partir de los de A + C por la Prop. 2.*

De nuevo, cualquier límite numérico menor de *w* será, por el Principio II, dado por la expresión

n (1) – límite mayor de n (1–w)

pero siendo dado el desarrollo de w por (1), el de 1–w será, obviamente,

$$1 - w = 0A + B + \frac{0}{0} C + \frac{1}{0} D.$$

Esto puede probarse directamente por el método de la Prop. 2, Capítulo X.

De ahí que

límite menor de n (w) = n (1) – límite mayor (B + C)

límite menor de (A + D), por el Principio II, puesto que las clases A + D y B + C son suplementarias.

Así, el límite menor del segundo miembro de (2) sería *n (t)* y generalizando esta forma de razonar, tenemos el siguiente resultado:

Un sistema de límites menores del desarrollo

$$A + 0B + \frac{0}{0} C + \frac{1}{0} D$$

será proporcionado por los límites menores de A + D.

Este resultado puede también inferirse directamente. Pues a partir de los límites numéricos menores tenemos que buscar el más grande. Ahora bien, en general obtenemos un límite menor más alto al conectar la clase D con A en la expresión de *w*, una combinación que, podemos hacer tal y como se muestra en varios ejemplos de la Lógica y que no podríamos obtener de otra manera.

Finalmente, tal y como el término concluyente del desarrollo de *w* indica la ecuación $D = 0$, es evidente que $n(D) = 0$. Por lo tanto tenemos

Límite menor de $n(D) \leqq 0$,

y esta ecuación, tratada por la Prop. 3 da las condiciones indispensables entre los elementos numéricos *n (s), n (t),* etc., a fin de que el problema pueda ser real y pueda incluir en sus datos los resultados de una posible experiencia.

Así, a partir del término $\frac{1}{0}$ (1–s) t en el segundo miembro de (2) deduciríamos

$$n(1 - s) + n(t) - n(1) \leqq 0,$$

$$\therefore n(t) \leqq n(s).$$

Estas conclusiones pueden incluirse en la regla siguiente:

10. REGLA.– *Determinar la expresión de la clase w como una función lógica desarrollada de los símbolos s, t, etc., en la forma*

$$w = A + 0B + \frac{0}{0} C + \frac{1}{0} D.$$

Entonces será

$$\text{Lim. Mayor } w = \text{ Lim. Mayor } A + C.$$
$$\text{Lim. Menor } w = \text{Lim. Menor } A + D.$$

Dándose las condiciones numéricas necesarias entre los datos por medio de la desigualdad.

$$\text{Lim. Menor } D \overline{\overline{<}} n(1).$$

Para aplicar el método anterior a la limitación de las soluciones de problemas de probabilidades, sólo se necesita sustituir en cada una de las fórmulas *n (x)* por la Prob. *x*, *n (y)* por la Prob. *y*, etc. y finalmente, *n* (1) por 1. Siendo la aplicación, sin embargo, de gran importancia, sería conveniente mostrar en la forma de una regla los principales resultados de transformación.

11. Dadas las probabilidades de cualesquiera sucesos *s*, *t*, etc. de los que otro suceso *w* es una función lógica desarrollada en la forma

$$w = A + 0B + \frac{0}{0} C + \frac{1}{0} D,$$

se buscan los sistemas de los límites superior e inferior de la Prob. *w* y las condiciones entre los datos.

SOLUCION.– Los límites superiores de la Prob.$(A + C)$,y los límites inferiores de la Prob. $(A + D)$ formarán dos sistemas como los que se buscan. Las condiciones entre las constantes en los datos vendrán dadas por la desigualdad

$$\text{Límite inferior Prob. } D \overline{\overline{<}} 0.$$

En la aplicación de estos principios tenemos siempre:

$$\text{Límite inferior Prob. } x_1 x_2 .. x_n = \text{Prob. } x_1 + \text{Prob. } x_2 .. + \text{Prob. } x_n - (n-1).$$

Además, los límites inferiores pueden determinarse sólo a partir de términos *únicos*, bien dados o formados por agregación. Los límites superiores están incluidos en la forma Σ Prob. *x*, refiriéndose la Prob. *x* sólo a símbolos que son diferentes y son tomados de diferentes términos en la expresión cuyo límite superior se busca. Así, pues, los límites superiores de la Prob. *xyz* + x (1–y) (1–z) son

$$\text{Prob. } x, \quad \text{Prob. } y + \text{Prob. } (1 - z), \quad \text{and} \quad \text{Prob. } z + \text{Prob. } (1 - y).$$

Obsérvese que si en el último caso hubiésemos tomado la Prob. *z* del primer término y la Prob. (1–z) del segundo – una conexión no prohibida – deberíamos haber tenido como suma de los mismos 1, el cual, como resultado sería inútil a fuerza de ser necesario *a priori*. Es obvio que podemos rechazar cualesquiera límites que no estén entre 0 y 1.

Apliquemos este método al Ejemplo 7, Caso III, del último capítulo.

La solución lógica final es

$$x = \frac{0}{0} stu + \frac{1}{0} \bar{s}tu + \frac{1}{0} st\bar{u} + s\bar{t}\bar{u}$$

$$+ \frac{1}{0} \bar{s}tu + 0\bar{s}\bar{t}u + 0\bar{s}tu + 0\bar{s}\bar{t}\bar{u},$$

siendo los datos

$$\text{Prob. } s = p, \quad \text{Prob. } t = q, \quad \text{Prob. } u = r.$$

Buscaremos los límites numéricos de x, y las condiciones que conectan p, q y r.

Los límites superiores de x son, de acuerdo con la regla, dados por los de $stu + s\bar{t}\bar{u}$. Por lo tanto son,

$$p, q + 1 - r, \quad r + 1 - q.$$

Los límites inferiores de x vienen dados por los de

$$\bar{s}tu + st\bar{u} + s\bar{t}\bar{u} + \bar{s}tu.$$

Podemos reunir el primero y el tercero de estos constituyentes en el término único $s\bar{t}$, y el segundo y tercero en el término único $s\bar{u}$. Los límites inferiores de x han de deducirse separadamente de los términos $s(1-t)$, $s(1-u)$, $(1-s)tu$ que dan

$$p + 1 - q - 1, \quad p + 1 - r - 1, \quad 1 - p + q + r - 2,$$

ó

$$p - q, \quad p - r, \quad \text{y} \quad q + r - p - 1.$$

Finalmente, las condiciones entre las constantes p, q y r son proporcionadas por los términos

$$\bar{s}tu, \quad st\bar{u}, \quad \bar{s}tu,$$

de los que, por la regla, deducimos

$$p + 1 - q + r - 2 \overline{\leq} 0, \quad p + q + 1 - r - 2 \overline{\leq} 0, \quad 1 - p + q + r - 2 \overline{\leq} 0.$$

ó

$$\text{or } 1 + q - p - r \overline{\geq} 0, \qquad 1 + r - p - q \overline{\geq} 0, \quad 1 + p - q - r \overline{\geq} 0.$$

Estas son las condiciones limitantes empleadas en el análisis de la solución final. Las condiciones por las que λ es limitado en esa solución, fueron determinadas simplemente a partir de las condiciones de que las cantidades s, t y u habían de ser

positivas. Límites más estrechos de esa cantidad podrían, con toda probabilidad, haberse deducido de la investigación anterior.

12. La siguiente aplicación está tomada de un problema importante, cuya solución será dada en el siguiente capítulo. Se dan

$$\text{Prob. } x = c_1, \quad \text{Prob. } y = c_2, \quad \text{Prob. } s = c_1 p_1, \quad \text{Prob. } t = c_2 p_2,$$

junto con la ecuación lógica

$$z = stxy + s\bar{t}x\bar{y} + \bar{s}t\bar{x}y + 0\bar{s}\bar{t}$$
$$+\frac{1}{0}\left\{\begin{array}{l} stx\bar{y} + st\bar{x}y + st\bar{x}\bar{y} + s\bar{t}xy + s\bar{t}\bar{x}y \\ + s\bar{t}\bar{x}\bar{y} + \bar{s}txy + \bar{s}tx\bar{y} + \bar{s}t\bar{x}\bar{y}; \end{array}\right.$$

y se pide determinar las condiciones entre las constantes c_1, c_2, p_1, p_2 y los límites mayor o menor de z. Busquemos primero las condiciones entre las constantes. Limitando nuestra atención a los términos cuyos coeficientes son $\frac{1}{0}$, formamos rápidamente, por la suma de los constituyentes, los siguientes términos, a saber:

$$s(1-x), \quad t(1-y), \quad sy(1-t), \quad tx(1-s);$$

y no podemos formar otros términos que no estén incluidos bajo estos. Por lo tanto, las condiciones entre las constantes son:

$$n(s) + n(1-x) - n(1) \overline{\overline{<}} 0,$$
$$n(t) + n(1-y) - n(1) \overline{\overline{<}} 0,$$
$$n(s) + n(y) + n(1-t) - 2n(1) \overline{\overline{<}} 0,$$
$$n(t) + n(x) + n(1-s) - 2n(1) \overline{\overline{<}} 0.$$

Ahora sustitúyase $n(x)$ por c_1, $n(y)$ por c_2, $n(s)$ por $c_1 p_1$, $n(t)$ por $c_2 p_2$ y $n(1)$ por 1 y tenemos, después de pequeñas reducciones,

$$c_1 p_1 \overline{\overline{<}} c_1, \qquad c_2 p_2 \overline{\overline{<}} c_2,$$
$$c_1 p_1 \overline{\overline{<}} 1 - c_2(1-p_2), \qquad c_2 p_2 \overline{\overline{<}} 1 - c_1(1-p_1).$$

Tales son, entonces, las condiciones indispensables entre las constantes.

De nuevo, los límites mayores de z son idénticos a los de la expresión

$$stxy + s(1-t)\,x(1-y) + (1-s)\,t(1-x)\,y;$$

la que, si tenemos en cuenta las condiciones

$$n(s) \overline{\overline{<}} n(x), \qquad n(t) \overline{\overline{<}} n(y),$$

determinadas arriba, encontramos que son

$$n(s) + n(t), \quad \text{o} \quad c_1 p_1 + c_2 p_2,$$
$$n(s) + n(1 - x), \text{ o } 1 - c_1 (1 - p_1)$$
$$n(t) + n(1 - y), \text{ o } 1 - c_2 (1 - p_2).$$

Por último, para averiguar los límites de z, rápidamente formamos de los constituyentes, cuyos coeficientes son 1 ó $\frac{1}{0}$, los términos simples s y t, no pudiendo formarse otros términos no incluidos bajo estos por selección o agregación. Por consiguiente, para los límites menores de z tenemos los valores $c_1 p_1$ y $c_2 p_2$.

13. Debe observarse que el método desarrollado arriba no siempre asigna los límites más estrechos que es posible determinar. Pero, en todos los casos, creo limita suficientemente las soluciones de problemas en la teoría de las probabilidades.

El problema de la determinación de los límites *más estrechos* de extensión numérica de una clase es, sin embargo, siempre reducible a una forma puramente algebraica (22). Así pues, resumiendo las ecuaciones

$$w = A + 0B + \frac{0}{0} C + \frac{1}{0} D,$$

representemos el límite numérico menor más alto de w por la fórmula $an(s) + bn(t) \ldots + dn(1)$, donde $a, b, c \ldots d$ son constantes numéricas que han de determinarse, y s, t, etc., los símbolos lógicos de los que A, B, C, D, son constituyentes. Entonces

$an(s) + bn(t) \ldots + dn(1)$ = límite menor de A con la condición de que $D = 0$.

De aquí que, si desarrollamos la función,

$$as + bt \ldots + d,$$

y rechazamos del resultado todos los constituyentes que se encuentran en D, los coeficientes de aquellos constituyentes que permanecen y se encuentran tambien en A, no deberían sobrepasar individualmente la unidad en el valor, y los coeficientes de aquellos componentes que permanecen y que no se encuentran en A, no deberían exceder, individualmente, a 0 en valor. Por lo tanto, tendremos una serie de desigualdades de la forma $f \overline{\overline{<}} 1$, y otra serie de la forma $g \overline{\overline{<}} 0$, sienfo f y g funciones lineales de a, b, c, etc. Entonces, aquellos valores de a, b... d, que, mientras cumplen las condiciones anteriores, dan a la función

$$an(s) + bn(t) \ldots + dn(1),$$

su valor más alto ha de determinarse, y el valor más alto en cuestión será el límite menor más alto de w. A lo anterior podemos añadir las relaciones formadas similar-

mente para la determinación de las relaciones entre las constantes dadas *n (s), n (t) ... n (1).*

14. El siguiente ejemplo, algo complicado, mostrará cómo la limitación de una solución es llevada a cabo, cuando el problema contiene un elemento arbitrario, constituyendo el representante de un sistema de problemas coincidentes en sus datos, pero ilimitados en sus quaesita.

PROBLEMA.– De n sucesos $x_1\ x_2\ \ldots\ x_n$, se conocen las siguientes particularidades:

PRIMERO.– La probabilidad de que o el suceso x_1 ocurra o de que todos los sucesos no ocurran es p_1.

SEGUNDO.– La probabilidad de que o el suceso x_2 ocurra o todos los sucesos no ocurran es p_2. Y así para los otros. Se pide encontrar la probabilidad de cualquier suceso único, o combinación de sucesos, representada por la forma general funcional $\phi\ (x_1\ .\ .\ x_n)$, o ϕ.

Adoptando una notación anterior, los datos del problema son

$$\text{Prob.}\ (x_1 + \bar{x}_1\ .\ .\ \bar{x}_n) = p_1\ .\ .\ \text{Prob.}\ (x_n + \bar{x}_1\ .\ .\ \bar{x}_n) = p_n.$$

y se busca la Prob. $\phi\ (x_1\ .\ .\ x_n)$

Supóngase en general

$$x_r + \bar{x}_1\ .\ .\ \bar{x}_n = s_r, \tag{1}$$

$$\phi = w. \tag{2}$$

de aquí obtenemos la ecuación lógica colectiva del problema

$$\Sigma\{(x_r + \bar{x}_1\ .\ .\ \bar{x}_n)\ \bar{s}_r + s_r\ (\bar{x}_r - \bar{x}_1\ .\ .\ \bar{x}_n)\} + \phi\bar{w} + w\bar{\phi} = 0. \tag{3}$$

De esta ecuación debemos eliminar los símbolos $x_1, \ldots x_n$ y determinar w como una función lógica desarrollada de $s_1\ .\ .\ s_n$.

Representemos el resultado de la eliminación antes mencionada de la forma

$$Ew + E'(1 - w) = 0;$$

entonces E será el resultado de la eliminación de los mismos símbolos de la ecuación

$$\Sigma\{(x_r + \bar{x}_1\ .\ .\ \bar{x}_n)\ \bar{s}_r + s_r\ (\bar{x}_r - \bar{x}_1\ .\ .\ \bar{x}_n)\} + 1 - \phi = 0. \tag{4}$$

Ahora bien, E será el producto de los coeficientes de todos los constituyentes (considerados con referencia a los símbolos $x_1, x_2 \ldots x_n$) que se encuentran en el desarrollo del primer miembro de la ecuación anterior. Además, ϕ y por lo tanto $1 - \phi$, constarán de una serie de tales constituyentes, que tienen a la unidad en sus respectivos coeficientes. Al determinar las formas de los coeficientes en el desarrollo del primer miembro de (4), será conveniente ordenarlos de la siguiente forma:

PRIMERO.– Los coeficientes de los componentes hallados en $1 - \phi$.

SEGUNDO.– Los coeficientes de $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$, si se hallan en ϕ.

TERCERO.– Los coeficientes de los constituyentes hallados en ϕ, excluyendo el constituyente $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$.

Esta es claramente una clasificación exhaustiva. Entonces, primero, el coeficiente de un constituyente encontrado en $1 - \phi$, en el desarrollo del primer miembro de (4), será de la forma:

1 + términos positivos derivados de Σ.

De aquí que cada coeficiente de este tipo puede sustituirse por la unidad, Prop. I, capítulo IX.

Segundo, el coeficiente de $\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n$, si se halla en ϕ, en el desarrollo del primer miembro de (4) será

$$\Sigma \bar{s}_r, \text{ o } \bar{s}_1 + \bar{s}_2 \ldots + \bar{s}_n$$

En tercer lugar, el coeficiente de cualquier otro constituyente, $x_1 \ldots x_i, \bar{x}_{i+1} \ldots \bar{x}_n$, hallado en ϕ, en el desarrollo del primer miembro de (4) será: $\bar{s}_1 \ldots + \bar{s}_i + s_{i+1} \ldots + s_n$.

Ahora bien, puede verse que E es el producto de todos los coeficientes arriba determinados; pero como los coeficientes de aquellos constituyentes que no se hallan en ϕ se reducen a la unidad, E puede considerarse como el producto de los coeficientes de aquellos constituyentes que se hallan en ϕ.

De la manera en que se forman esos coeficientes, derivamos la siguiente regla para la determinación de E, a saber, en cada constituyente que se halle en ϕ, excepto el constituyente $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$, escribir por x_1 $\bar{s}_1$ por $\bar{x}_1$ escribir s_1, etc y sumar los resultados; pero para el constituyente $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$, si aparece en ϕ, escribir $\bar{s}_1 + \bar{s}_2 \ldots + \bar{s}_n$; el producto de todas estas sumas es E.

Para hallar E′ debemos hacer $w = 0$, en (3) y eliminar $x_1, x_2 \ldots x_n$ de la ecuación reducida. Esta ecuación será

$$\Sigma\{(x_r + \bar{x}_1 \ldots + \bar{x}_n)\, \bar{s}_r + s_r\, (\bar{x}_r - \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n)\} + \phi = 0. \qquad (5)$$

Por lo tanto E′ será formado de los contituyentes en (5) $1 - \phi$, es decir, de los componentes que *no* se hallan en ϕ, de la misma forma que E se forma de los componentes que se hallan en ϕ.

Considérese a continuación la ecuación siguiente

$$Ew + E'(1 - w) = 0.$$

Esta da

$$w = \frac{E'}{E' - E}. \qquad (6)$$

Ahora bien, E y E′ son funciones de los símbolos $s_1, s_2 \ldots s_n$. La expansión del valor de w constará, por lo tanto, de todos los constituyentes que pueden formarse de entre esos símbolos, con sus coeficientes adecuados añadidos a ellos, como determina la regla del desarrollo.

Además, E y E′ están formados cada uno por la multiplicación de factores, y ninguno de ellos puede hacerse cero, a no ser que se haga cero uno de los factores de que está compuesto. De nuevo, cualquier factor como $\bar{s}_1 \ldots + \bar{s}_n$ puede hacerse cero sólo cuando todos los términos de cuya suma está formado se hagan cero juntos, puesto que en el desarrollo atribuimos solamente a estos términos los valores 0 y 1. Es además evidente que no hay dos factores diferentes entre si que puedan hacerse cero juntos. Así, los factores $\bar{s}_1 + \bar{s}_2 \ldots + \bar{s}_n$, y $s_1 + \bar{s}_2 \ldots + \bar{s}_n$, no pueden hacerse cero simultáneamente, pues el primero no puede hacerse cero a no ser que $\bar{s}_1 = 0$, ó $s_1 = 1$; pero el último no puede hacerse cero a no ser que $s_1 = 0$.

Primero, determinemos el coeficiente del constituyente $\bar{s}_1\ \bar{s}_2 \ldots\ \bar{s}_n$ en el desarrollo del valor de w.

La suposición simultánea $\bar{s}_1 = 1$, $\bar{s}_2 = 1 \ldots \bar{s}_n = 1$, haría que el factor $s_1 + s_2 \ldots + s_n$ se hicera cero si esto ocurriera en E o E′; y ningún otro factor se haría cero bajo la misma suposición, pero $s_1 + s_2 \ldots + s_n$ no aparece como un factor de E o de E′; por lo tanto, ninguna de estas cantidades puede hacerse cero, y, por consiguiente, la expresión $\dfrac{E'}{E' - E}$, no es 1, 0 ni $\dfrac{0}{0}$.

Por lo cual el coeficiente de $\bar{s}_1\ \bar{s}_2 \ldots\ \bar{s}_n$ *en el valor expandido de w puede representarse por* $\dfrac{1}{0}$.

En segundo lugar, determinemos el coeficiente del constituyente $s_1\ s_2 \ldots s_n$.

Las suposiciones de que $s_1 = 1, s_2 = 1, \ldots s_n = 1$, harían que el factor $\bar{s}_1 + \bar{s}_2 \ldots + \bar{s}_n$ se hiciese cero. Este factor se halla en E y no en E′ siempre que ϕ contenga tanto los constituyentes $x_1\ x_2 \ldots x_n$, como $\bar{x}_1\ \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$. Aquí entonces $\dfrac{E'}{E' - E}$ se convierte en $\dfrac{E'}{E'}$ ó 1. El factor $\bar{s}_1 + \bar{s}_2 \ldots + \bar{s}_n$ se halla en E′ y no en E, si ϕ no contiene ni a los constituyentes $x_1\ x_2 \ldots x_n$ ni a $\bar{x}_1\ \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$. Entonces $\dfrac{E'}{E' - E}$ se convierte en $\dfrac{0}{-E}$ ó 0. Por último, el factor $\bar{s}_1 + \bar{s}_2 \ldots + \bar{s}_n$ está tanto en E como en E′, si uno de los constituyentes $x_1\ x_2 \ldots x_n$ y $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$ se halla en ϕ y otro no. Entonces $\dfrac{E'}{E' - E}$ se convierte en $\dfrac{0}{0}$.

El coeficiente del constituyente $s_1\ s_2 \ldots s_n$ *será por lo tanto 1, 0 ó* $\dfrac{0}{0}$, *según que* ϕ *contenga los dos constituyentes* $x_1\ x_2 \ldots x_n$ *y* $\bar{x}_1\ \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$, *o ninguno de ellos, o uno de ellos y no el otro.*

Determinar por último el coeficiente de cualquier otro constituyente como $s_1 \ldots s_i\ \bar{s}_{i+1} \ldots \bar{s}_n$.

Las suposiciones $s_1 = 1, \ldots s_i = 1, s_{i+1} = 0, s_n = 0$ harían que el factor $\bar{s}_1 \ldots + \bar{s}_i + s_{i+1} \ldots + s_n$ se hiciera cero. Ahora bien, este factor se halla en E, si el constituyente $x_1 \ldots x_i\ \bar{x}_{i+1} \ldots \bar{x}_n$ se halla en ϕ y en E', si el dicho constituyente no se halla en ϕ.

En primer caso tenemos $\dfrac{E'}{E' - E} = \dfrac{E'}{E'} = 1$; en el último caso tenemos $\dfrac{E'}{E' - E} = \dfrac{0}{0 - E} = 0$.

Por lo tanto el coeficiente de cualquier otro constituyente $s_1 \ldots s_i, \bar{s}_{i+1} \ldots \bar{s}_n$ *es 1 ó 0 según que el constituyente parecido* $x_1 \ldots x_i\ \bar{x}_{i+1} \ldots \bar{x}_n$ *esté o no esté en* ϕ.

3. Por consiguiente, podemos determinar prácticamente el valor de w de la siguiente forma. Rechazando de la expresión dada de ϕ los constituyentes $x_1\ x_2 \ldots x_n$ y $\bar{x}_1\ \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$, caso de que ambos o uno de ellos se hallasen en ella cambiemos los símbolos $x_1, x_2, \ldots x_n$, respectivamente en el resultado por $s_1, s_2, \ldots s_n$. Sean determinados los coeficientes de los constituyentes $s_1\ s_2 \ldots s_n$ y $\bar{s}_1\ \bar{s}_2 \ldots \bar{s}_n$ de acuerdo con las reglas especiales para estos casos dadas anteriormente, y hagamos que todo otro constituyente tenga como coeficiente 0. El resultado será el valor de w como una función de $s_1, s_2, \ldots s_n$.

Como caso particular, hagamos que $\phi = x_1$. Se busca determinar a partir de los datos proporcionados la probabilidad del suceso x_1.

El símbolo x_1 expandido en términos de la serie completa de símbolos $x_1, x_2, \ldots x_n$, generará todos los constituyentes de aquellos símbolos que tienen a x_1 como factor. Entre aquellos constituyentes se hallará el constituyente $x_1\ x_2 \ldots x_n$, pero no el constituyente $\bar{x}_1\ \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$.

Por consiguiente en el valor expandido de x_1 como una función de los símbolos $s_1, s_2, \ldots s_n$, los constituyentes $s_1\ s_2 \ldots s_n$ tendrán el coeficiente $\dfrac{0}{0}$, y el constituyente $\bar{s}_1\ \bar{s}_2 \ldots \bar{s}_n$ el coeficiente $\dfrac{1}{0}$.

Si de x¿ rechazamos el constituyente $x_1\ x_2 \ldots x_n$, el resultado será $x_1 - x_1 x_2 \ldots x_n$ y cambiando allí x_1 por s_1, etc., tenemos $s_1 - s_1 s_2 \ldots s_n$ para la correspondiente parte de la expresión de x_1 como una función de $s_1, s_2, \ldots s_n$.

Por lo tanto, la expresión final para x_1 es

$$x_1 = s_1 - s_1\ s_2 \ldots s_n + \frac{0}{0} s_1\ s_2 \ldots s_n + \frac{1}{0} \bar{s}_1 \bar{s}_2 \ldots \bar{s}_n \qquad (7)$$

+ los constituyentes cuyos coeficientes son 0.

La suma de todos los constituyentes en la expansión anterior cuyos coeficientes son ó 1, 0, ó $\dfrac{0}{0}$, será $1 - \bar{s}_1 \bar{s}_2 \ldots \bar{s}_n$.

Por lo cual, tendremos el siguiente sistema *algebraico* para la determinación de la Prob. x_1, a saber:

$$\text{Prob. } x_1 = \frac{s_1 - s_1 s_2 \,..\, s_n + c s_1 s_2 \,..\, s_n}{1 - \bar{s}_1 \bar{s}_2 \,..\, \bar{s}_n}, \tag{8}$$

con las relaciones

$$\frac{s_1}{p_1} = \frac{s_2}{p_2} \,.. = \frac{s_n}{p_n} = 1 - \bar{s}_1 \bar{s}_2 \,..\, \bar{s}_n = \lambda. \tag{9}$$

Se verá que las relaciones para la determinación de $s_1 s_2 \,..\, s_n$ son bastante independientes de la forma de la función ϕ y los valores de estas cantidades, una vez determinados, servirán para todos los posibles problemas en los que los datos sean los mismos, aunque las *quaesita* de esos problemas puedan variar. La naturaleza de ese suceso, o combinación de sucesos, cuya probabilidad se busca, afectará sólo la forma de la función en la que los valores determinados de $s_1 s_2 \,..\, s_n$ han de ser sustituidos.

Tenemos a partir de (9)

$$s_1 = p_1\lambda, \qquad s_2 = p_2\lambda, \;..\; s_n = p_n\lambda.$$

de donde

$$1 - (1 - p_1\lambda)(1 - p_2\lambda) \,..\, (1 - p_n\lambda) = \lambda.$$

ó

$$1 - \lambda = (1 - p_1\lambda)(1 - p_2\lambda) \,..\, (1 - p_n\lambda); \tag{10}$$

de cuya ecuación ha de determinarse el valor de λ.

Suponiendo que este valor está determinado, el valor de la Prob. x_1 será

$$\frac{p_1\lambda - (1 - c)\, p_1 p_2 \,..\, p_n \lambda^n}{1 - (1 - p_1\lambda)(1 - p_2\lambda) \,..\, (1 - p_n\lambda)},$$

o, al reducir por (10),

$$\text{Prob. } x_1 = p_1 - (1 - c)\, p_1 p_2 \,..\, p_n \lambda^{n-1}. \tag{11}$$

Busquemos a continuación las condiciones que deben cumplirse entre las constantes $p_1, p_2, \,.. p_n$ y los límites del valor de la Prob. x_1.

Como sólo hay un término con el coeficiente $\frac{1}{0}$, sólo hay una condición entre las constantes, a saber,

Límite menor

$$(1 - s_1)\,(1 - s_2)\,.\,.\,(1 - s_n) \leqq 0.$$

ó

$$n\,(1 - s_1) + n\,(1 - s_2)\,.\,. + n\,(1 - s_n) - (n-1)\,n\,(1) \leqq 0.$$

ó

$$n\,(1) - n\,(s_1) - n\,(s_2)\,.\,. - n\,(s_n) \leqq 0.$$

de donde

$$p_1 + p_2\,.\,. + p_n \geqq 1,$$

es la condición buscada.

El límite mayor de la Prob. x_1 es el límite mayor de la suma de aquellos constituyentes cuyos coeficientes son 1 ó $\frac{0}{0}$. Pero esa suma es s_1.

Por lo tanto,

límite mayor, Prob. x_1 = límite mayor $s_1 = p_1$.

El límite menor de la Prob. x_1 será idéntico al límite menor de la expresión

$$s_1 - s_1 s_2\,.\,. s_n + (1 - s_1)\,(1 - s_2)\,.\,.\,(1 - s_n).$$

Un poco de atención mostrará que los diferentes agregados, términos que pueden formarse de lo anterior, incluyendo cada uno el mayor número posible de constituyentes, serán los siguientes, a saber:

$$s_1\,(1 - s_2),\quad s_1\,(1 - s_3),\,.\,.\,s_1\,(1 - s_n),\quad (1 - s_2)\,(1 - s_3)\,.\,.\,(1 - s_n).$$

A partir de estos deducimos las siguientes expresiones para el límite menor, a saber:

$$p_1 - p_2,\quad p_1 - p_3\,.\,.\,p_1 - p_n,\quad 1 - p_2 - p_3\,.\,. - p_n.$$

Por lo tanto, el valor de la Prob. x_1 no se quedará corto de esos valores, ni excederá el valor de p_1.

Sin embargo, en vez de emplear estas condiciones, podemos aprovecharnos directamente del principio indicado en la demostración del método general *en las* probabilidades. La condición de que $s_1, s_2, \,.\,.\,s_n$ deben ser cada uno menor que la unidad, requiere que λ sea menor en cada una de las cantidades $\frac{1}{P_1}$, $\frac{1}{P_2}$, ... $\frac{1}{P_n}$.

Y la condición de que $s_1, s_2 \ldots s_n$ han de ser mayores que 0, requiere que λ fuera también mayor que 0. Ahora bien, $p_1\ p_2\ .\ .\ p_n$ siendo funciones adecuadadas y cumpliendo la condición

$$p_1 + p_2\,.\,. + p_n > 1,$$

puede mostrarse que sólo un valor positivo de λ puede deducirse de la ecuación

central (10) que será menor que cada una de las cantidades $\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \ldots \frac{1}{p_n}$. Este valor de λ es, por lo tanto, el que se busca.

Para probar esto, consideremos la ecuación

$$(1 - p_1\lambda)(1 - p_2\lambda) \ldots (1 - p_n\lambda) - 1 + \lambda = 0.$$

cuando $\lambda = 0$ el primer miembro se hace cero y se satisface la ecuación. Examinemos las variaciones del primer miembro entre los límites $\lambda = 0$ y $\lambda = 1/p_1$ suponiendo que p_1 es el mayor de los valores $p_1 p_2 \ldots p_n$. Representando el primer miembro de la ecuación por V tenemos

$$\frac{dV}{d\lambda} = -p_1(1 - p_2\lambda) \ldots (1 - p_n\lambda) \ldots - p_n(1 - p_1\lambda) \ldots (1 - p_{n-1}\lambda) + 1,$$

la cual, cuando $\lambda = 0$, toma la forma $- p_1 - p_2 \cdots - p_n + 1$ y su valor es negativo.

De nuevo tenemos

$$\frac{d^2V}{d\lambda^2} = p_1 p_2 (1 - p_3\lambda)(1 - p_n\lambda) + \&c.,$$

expresión compuesta de una serie de términos que, bajo las restricciones dadas con referencia al valor de λ, son *positivos*.

Por último cuando $\lambda = \frac{1}{p_1}$, tenemos

$$V = -1 + \frac{1}{p_1},$$

que es positivo.

De todo esto resulta patente que si construimos una curva cuyas ordenadas representen el valor de V correspondiente a la abscisa λ, esa curva pasará a través del origen y para valores pequeños de λ pasará por debajo de la abscisa. Su convexidad será hacia abajo entre los límites $\lambda = 0$ y $\lambda = \frac{1}{p_1}$, y en el límite extremo $\frac{1}{p_1}$ la curva estará por encima de la abscisa, siendo su ordenada positiva. De esta descripción se deduce que intersectará a la abscisa una vez y sólo una, dentro de los límites especificados, a saber, entre los valores $\lambda = 0$, y $\lambda = \frac{1}{p_1}$.

La solución del problema es, por lo tanto, expresada por (11), siendo el valor de λ aquella raíz de la ecuación (10) que está entre los límites 0 y $\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \ldots \frac{1}{p_n}$.

La constante c es obviamente la probabilidad de que si los sucesos $x_1 x_2$, ... x_n ocurren todos, o no ocurre ninguno, todos sucederán.

Esta determinación del valor de λ es suficiente para todos los problemas en los que los datos son los mismos que los datos del problema visto ahora mismo. Es, tal y como esperamos a partir de discusiones anteriores, una determinación independiente de la forma de la función ϕ.

Supongamos otro ejemplo

$$\phi = \text{o } w = x_1(1-x_2)..(1-x_n)..+ x_n(1-x_1)..(1-x_{n-1}).$$

Esto es equivalente a pedir la probabilidad de que de los sucesos x_1, x_2, ... x_n uno y sólo uno, ocurrirá. El valor de w será obviamente

$$w = s_1(1-s_2)..(1-s_n)..+ s_n(1-s_1)..(1-s_{n-1}) + \frac{1}{0}(1-s_1)..(1-s_n),$$

de lo que tendríamos

$$\text{Prob. } \{x_1(1-x_2)..(1-x_n)..+ x_n(1-x_1)..(1-x_{n-1})\}$$

$$= \frac{s_1(1-s_2)..(1-s_n)..+ s_n(1-s_1)..(1-s_{n-1})}{1-(1-s_1)..(1-s_n)}$$

$$= \frac{p_1\lambda(1-p_2\lambda)..(1-p_n\lambda)..+ p_n\lambda(1-p_1\lambda)..(1-p_{n-1}\lambda)}{\lambda}$$

$$= \frac{p_1(1-\lambda)}{1-p_1\lambda} + \frac{p_2(1-\lambda)}{1-p_2\lambda}.. + \frac{p_n(1-\lambda)}{1-p_n\lambda}$$

Esta solución es útil para ilustrar las observaciones hechas en el capítulo introductorio (I–16). Las dificultades esenciales del problema se fundan en la naturaleza de sus datos y no en la de sus "quaesita". La ecuación central por la que se determina λ, y las peculiares discusiones conectadas con ello, son igualmente pertinentes a cada forma que ese problema puede asumir, variando la interpretación de los elementos arbitrarios en su expresión original.

REFERENCIAS

(21) La expresión anterior del límite menor de ***nxy*** es aplicada por el Profesor De Morgan, por quien parece haber sido dada primero, a la forma silogística:

La mayoría de los hombres en una cierta compañía tienen abrigos.

La mayoría de los hombres en la misma compañía tienen chalecos.

Por lo tanto, algunos en la compañía tienen abrigos y chalecos.

(22) El autor lamenta la pérdida de un manuscrito, escrito hace unos cuatro años, en el que este método, según cree, se desarrolló con bastante extensión. Su recuerdo del contenido está casi totalmente confinado a la impresión de que el principio del método era el mismo que el descrito arriba y que se probó su validez. Los anteriores métodos de este capítulo son más fáciles, casi es innecesario decirlo, aunque ciertamente menos generales.

CAPITULO XX

PROBLEMAS REFERENTES A LA CONEXION DE CAUSAS Y EFECTOS

1. El comprender en todos los casos específicos la relación de causa y efecto, a fin de conectar los dos extremos en el pensamiento de acuerdo con el orden en el que están relacionados en la naturaleza (puesto que el modus operandi es, y siempre debe ser, desconocido para nosotros), es el objeto último de la ciencia. Este tratado ha señalado que hay una especial referencia a tal objeto en la constitución de las facultades intelectuales. Hay una esfera del pensamiento que comprende las cosas sólo como partes coexistentes de un universo; pero también hay una parte del pensamiento (capítulo XI) en la que son entendidos como conexiones de una cadena contínua y, a los ojos de los hombres, interminable – como ocupando su lugar en un orden que las conecta tanto con lo que ha ocurrido antes como con lo que seguirá después. Al contemplar tal serie, es imposible no sentir la preeminencia debida a la relación de causa y efecto, por encima de todas las demás relaciones.

Propongo considerar aquí, en su forma abstracta, algunos problemas en los que aparece la relación anterior. Existe entre esos problemas una amplia diversidad, tal como podría anticiparse a partir de la naturaleza de la relación con la que tienen que ver. A partir de las probabilidades de causas asignadas *a priori*, o proporcionadas por la experiencia y sus probabilidades respectivas de asociación con un efecto previsto, puede pedirse que se determine la probabilidad de ese efecto y esto o, primero absolutamente, o segundo bajo condiciones dadas. Algunos de los problemas siguientes se refieren a tal fin. Por otra parte, puede pedirse determinar la probabilidad de una causa determinada o de alguna conexión específica entre un sistema de causas, a partir de efectos observados, y las tendencias conocidas de dichas causas, solas o en conexión, a la producción de tales efectos. Este tipo de cuestiones será estudiado en una parte posterior del capítulo y también se tendrán en cuenta otras formas de la investigación general. Yo resaltaría que aunque estos ejemplos están pensados principalmente como ilustraciones de un *método*, no se ha prestado atención a la cuestión de facilidad o conveniencia en la aplicación de ese método. Por el contrario, han sido ideados, con el resultado que sea, como tipos de la clase de problemas que podría esperarse que surgieran del estudio de la relación de causa y efecto en la más compleja de sus manifestaciones reales y visibles.

2. PROBLEMA I.— Las probabilidades de dos causas A_1 y A_2 son c_1 y c_2 respectivamente. La probabilidad de que si la causa A_1 se presenta un suceso E la acompañará (tanto si es una consecuencia de la causa A_1 como si no) es p_1, y la probabilidad de que si la causa A_2 se presenta, que el suceso E le acompañará, tanto si es una consecuencia de ella como si no, es p_2. Además, el suceso E no puede aparecer en ausencia de ambas causas A_1 y A_2 (23).

Se busca la probabilidad del suceso E.

La solución de lo que este problema es en el caso de que las causas A_1, A_2 sean mutuamente excluyentes, sabemos bien que es

$$\text{Prob. } E = c_1 p_1 + c_2 p_2;$$

y expresa un caso particular de un fundamental y muy importante principio en la tradicional teoría de las probabilidades.

Aquí se propone resolver el problema sin la restricción establecida anteriormente.

Representemos

La causa A_1 por x

La causa A_2 por y

El efecto E por z

Entonces, tenemos los siguientes datos numéricos:

$$\begin{array}{ll} \text{Prob. } x = c_1, & \text{Prob. } y = c_2, \\ \text{Prob. } xz = c_1 p_1, & \text{Prob. } yz = c_2 p_2. \end{array} \qquad (1)$$

Además, sabemos que si las causas A_1, A_2 no se dan, el efecto E no ocurre; por lo tanto tenemos la ecuación lógica

$$(1 - x)(1 - y) = v(1 - z).$$

o, eliminando, v

$$z(1 - x)(1 - y) = 0. \qquad (2)$$

Ahora, hacer

$$xz = s, \qquad yz = t. \qquad (3)$$

Entonces reduciendo estas ecuaciones (VIII. 7) y conectando el resultado con (2),

$$xz(1-s)+s(1-xz)+yz(1-t)+t(1-yz)+z(1-x)(1-y)=0. \quad (4)$$

A partir de esta ecuación, debe determinarse z, como una función lógica desarrollada de x, y, s y t y su probabilidad deducida, de ahí por medio de los datos

$$\text{Prob. } x = c_1, \quad \text{Prob. } y = c_2, \quad \text{Prob. } s = c_1 p_1, \quad \text{Prob. } t = c_2 p_2. \quad (5)$$

Ahora bien, desarrollando (4) con respecto a z y poniendo $\bar{x}$ por $1-x$, $\bar{y}$ por $1-y$, etc., tenemos

$$(x\bar{s} + s\bar{x} + y\bar{t} + t\bar{y} + \bar{x}\bar{y})\, z + (s + t)\,\bar{z} = 0,$$

$$\therefore\ z + \frac{s+t}{s+t-x\bar{s}-s\bar{x}-y\bar{t}-t\bar{y}-\bar{x}\bar{y}}$$

$$= stxy + \frac{1}{0}\, st\bar{x}\bar{y} + \frac{1}{0}\, s\bar{t}xy + \frac{1}{0}\, s\bar{t}\bar{x}\bar{y}$$

$$+ \frac{1}{0}\, \bar{s}txy + \frac{1}{0}\, \bar{s}t\bar{x}\bar{y} + \frac{1}{0}\, \bar{s}\bar{t}xy + \frac{1}{0}\, \bar{s}\bar{t}\bar{x}\bar{y}$$

$$+ 0\bar{s}\bar{t}xy + 0\bar{s}\bar{t}\bar{x}\bar{y} + 0\bar{s}\bar{t}\bar{x}y + 0\bar{s}\bar{t}\bar{x}\bar{y}. \qquad (6)$$

A partir de este resultado encontramos (XVII–17),

De donde

$$V = stxy + st\bar{x}\bar{y} + \bar{s}t\bar{x}y + \bar{s}\bar{t}xy + \bar{s}\bar{t}\bar{x}\bar{y}$$
$$+ \bar{s}\bar{t}\bar{x}y + \bar{s}\bar{t}\bar{x}\bar{y}$$
$$= stxy + st\bar{x}\bar{y} + \bar{s}t\bar{x}y + \bar{s}\bar{t}.$$

pasando de la Lógica al Algebra, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones, representando u la probabilidad buscada:

$$\frac{stxy + st\bar{x}\bar{y} + \bar{s}\bar{t}x}{c_1} = \frac{stxy + \bar{s}t\bar{x}y + \bar{s}\bar{t}y}{c_2}$$

$$= \frac{stxy + st\bar{x}\bar{y}}{c_1 p_1} = \frac{stxy + \bar{s}t\bar{x}y}{c_2 p_2}$$

$$= \frac{stxy + st\bar{x}\bar{y} + \bar{s}t\bar{x}y}{u} = \frac{stxy + st\bar{x}\bar{y} + \bar{s}t\bar{x}y + \bar{s}\bar{t}}{1} = V, \qquad (7)$$

de la que debemos eliminar s, t, x, y y V.

Ahora bien, si tenemos una serie de fracciones iguales como

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \ldots = \lambda,$$

sabemos que,

$$\frac{la + mb + nc}{la' + mb' + nc'} = \lambda.$$

y así, a partir del anterior sistema de ecuaciones, podemos deducir

$$\frac{\bar{s}t\bar{x}y}{u - c_1p_1} = \frac{s\bar{t}x\bar{y}}{u - c_2p_2} = \frac{\bar{s}\bar{t}}{1 - u} = V;$$

de donde tenemos, al igualar el producto de los tres primeros miembros con el cubo del último,

$$\frac{s\bar{s}^2t\bar{t}^2x\bar{x}y\bar{y}}{(u - c_1p_1)(u - c_2p_2)(1 - u)} = V^3. \qquad (8)$$

Además, a partir del sistema (7) tenemos

$$\frac{\bar{s}t\bar{x}}{1 - u - c_1 + c_1p_1} = \frac{\bar{s}\bar{t}\bar{y}}{1 - u - c_2 + c_2p_2} = \frac{stxy}{c_1p_1 + c_2p_2 - u} = V,$$

De donde, procediendo como antes

$$\frac{s\bar{s}^2t\bar{t}^2x\bar{x}y\bar{y}}{(1 - c_1 + c_1p_1 - u)(1 - c_2 + c_2p_2 - u)(c_1p_1 + c_2p_2 - u)} = V^3. \quad (9)$$

Igualando los valores de V^3 en (8) y (9), tenemos

$$(u - c_1p_1)(u - c_2p_2)(1 - u)$$
$$= \{1 - c_1(1 - p_1) - u\}\{1 - c_2(1 - p_2) - u\}(c_1p_1 + c_2p_2 - u),$$

que puede escribirse más convenientemente de la forma

$$\frac{(u - c_1p_1)(u - c_2p_2)}{c_1p_1 + c_2p_2 - u} = \frac{\{1 - c_1(1 - p_1) - u\}\{1 - c_2(1 - p_2) - u\}}{1 - u}. \quad (10)$$

A partir de esta ecuación se puede encontrar el valor de u. Sólo queda determinar cual de las raíces debe de tomarse para este propósito.

3. Se ha mostrado (XIX. 12) que la cantidad u, con el fin de que pueda representar la probabilidad buscada en el caso anterior, debe sobrepasar cada una de las cantidades c_1, p_1, c_2 p_2, y quedarse más corta que cada una de las cantidades $1 - c_1(1 - p_1)$, $1 - c_2(1 - p_2)$ y $c_1p_1 + c_2p_2$; siendo la condición entre las constantes, además que las tres últimas cantidades deben individualmente sobrepasar cada

una de las dos primeras. Ahora mostraré que estas condiciones una vez cumplidas, la ecuación final (10) tiene sólo una raíz que está dentro de los límites indicados. Esa raíz será, por lo tanto, el valor requerido de u.

Representemos los límites más bajos $c_1 p_1$, $c_2 p_2$, por a, b respectivamente y los límites superiores $1 - c_1(1 - p_1)$, $1 - c_2(1 - p_2)$, y $c_1 p_1 + c_2 p_2$, por a', b', c' respectivamente. Entonces la ecuación general puede expresarse en la forma

$$(u - a)(u - b)(1 - u) - (a' - u)(b' - u)(c' - u) = 0, \qquad (11)$$

ó

$$(1 - a' - b')u^2 - \{ab - a'b' + (1 - a' - b')c'\}u + ab - a'b'c' = 0.$$

Representando el primer miembro de la ecuación anterior por V tenemos

$$\frac{d^2V}{du^2} = 2(1 - a' - b'). \qquad (12)$$

Supongamos ahora que a es el más alto de los límites inferiores de u, a' el más bajo de los límites más altos, y tracemos el progreso de los valores de V entre los límites $u = a$ y $u = a'$.

Cuando $u = a$, vemos a partir de la forma del primer miembro de (11) que V es negativo, y cuando $u = a'$ vemos que V es positivo.

Entre esos límites V varía contínuamente sin llegar a ser infinito y $\frac{d^2V}{du^2}$ tiene siempre el mismo signo.

Por lo tanto, si u representa la abscisa, V la ordenada de una curva plana, es evidente que la curva pasará desde un punto por debajo del eje de u correspondiente a $u = a$, hasta un punto por encima del eje de u correspondiendo a $u = a'$, permaneciendo la curva contínua, tendiendo su concavidad o convexidad simpre en la misma dirección. Prestando un poco de atención veremos que bajo estas circunstancias, debe de cortar el eje de u una vez y sólo una.

Por consiguiente, entre los límites $u = a$, $u = a'$, existe un valor de u y sólo uno, que satisface la ecuación (11). Más adelante, se hará patente, si trazamos la curva en el pensamiento, que el otro valor de u será menor que a cuando la cantidad $1 - a' - b'$ es positiva y mayor que cualquiera de las cantidades a', b', c', cuando $1 - a' - b'$ es negativo. Por lo tanto, resulta que en la solución de (11) debe de tomarse el signo positivo del radical. Así tenemos

$$u = \frac{ab - a'b' + (1 - a' - b')c' + \sqrt{Q}}{2(1 - a' - b')}, \qquad (13)$$

donde $Q = \{ab - a'b' + (1 - a' - b')c'\}^2 - 4(1 - a' - b')(ab - a'b'c')$.

4. Los resultados de esta investigación pueden ser comprobados hasta cierto punto. Así, es evidente que la probabilidad del suceso E, por lo general, debe sobrepasar la probabilidad de la concurrencia del suceso E y la causa A_1 ó A_2. Por lo tanto debemos de tener, tal como la solución indica

$$u > c_1 p_1, \quad u > c_2 p_2.$$

De nuevo, está claro que la probabilidad del efecto E debe, por lo general, ser menor de lo que sería si las causas A_1, A_2 fueran mutuamente excluyentes. Por lo tanto,

$$u \leqq c_1 p_1 + c_2 p_2.$$

Por último, puesto que la probabilidad de la no ocurrencia del efecto E coincidiendo con la presencia de la causa A_1 debe, en general, ser menor que la probabilidad absoluta de la no ocurrencia de E, tenemos

$$c_1 (1 - p_1) \leqq 1 - u,$$
$$\therefore u \leqq 1 - c_1 (1 - p_1).$$

similarmente

$$u \leqq 1 - c_2 (1 - p_2).$$

Y así, las condiciones por las que fue limitada la solución general quedan confirmadas.

Además, sean $p_1 = 1$, $p_2 = 1$. Esto es para suponer que cuando se presenta cualquiera de las causas A_1, A_2, el suceso E ocurrirá. Tenemos entonces $a = c_1, b = c_2$, $a' = 1, b' = 1, c' = c_1 + c_2$, y sustituyendo en (13) tenemos

$$u = \frac{c_1 c_2 - c_1 - c_2 - 1 + \sqrt{\{(c_1 c_2 - c_1 - c_2 - 1)^2 + 4 (c_1 c_2 - c_1 - c_2)\}}}{-2}$$

$$= c_1 + c_2 - c_1 c_2 \text{ al reducir}$$

$$= 1 - (1 - c_1) (1 - c_2).$$

Ahora bien, esta es la expresión conocida para la probabilidad de que al menos una causa estará presente, la cual, bajo las circunstancias, es evidentemente la probabilidad del suceso E. Supongamos finalmente que c_1 y c_2 sean muy pequeños, de tal forma que pueda no tenerse en cuenta su producto. Entonces, la expresión para u se reduce a $c_1 p_1 + c_2 p_2$. Ahora bien, cuanto más pequeña sea la probabilidad de cada causa, más pequeña, en un grado mucho más alto, es la probabilidad de una conjunción de causas. En última instancia, por consiguiente, continuando con tal reducción, la probabilidad del suceso E se convierte en la misma, como si las causas fueran mutuamente excluyentes.

Me he extendido más en esta solución porque sirve de alguna forma como modelo para las que siguen, algunas de las cuales, teniendo un aspecto más complicado, podrían presentar dificultad sin tal preparación.

5. PROBLEMA II.— En lugar de adoptar la suposición tomada en el problema anterior, que el suceso E no puede suceder cuando las dos causas A_1, A_2 están ausentes, supóngase que las causas A_1, A_2 no pueden ausentarse las dos, y hagamos que las otras circunstancias se mantengan como antes. Se busca, entonces, la probabilidad del suceso E.

Aquí, en lugar de la ecuación (2) de la anterior solución tenemos la ecuación

$$(1 - x)\ (1 - y) = 0.$$

Se ha encontrado que la expresión lógica desarrollada de z es

$$\begin{aligned} z = {} & stxy + \frac{1}{0} stx\bar{y} + \frac{1}{0} st\bar{x}y + \frac{1}{0} st\bar{x}\bar{y} \\ & + \frac{1}{0} s\bar{t}xy + s\bar{t}x\bar{y} + \frac{1}{0} s\bar{t}\bar{x}y + \frac{1}{0} s\bar{t}\bar{x}\bar{y} \\ & + \frac{1}{0} \bar{s}txy + \frac{1}{0} \bar{s}tx\bar{y} + \bar{s}t\bar{x}y + \frac{1}{0} \bar{s}t\bar{x}\bar{y} \\ & + 0\bar{s}\bar{t}xy + 0\bar{s}\bar{t}x\bar{y} + 0\bar{s}\bar{t}\bar{x}y + \frac{1}{0} \bar{s}\bar{t}\bar{x}\bar{y}; \end{aligned}$$

y la solución final es

$$\text{Prob. } E = u;$$

estando determinada la cantidad u por la solución de la ecuación

$$\frac{(u-a)\ (u-b)}{a+b-u} = \frac{(a'-u)\ (b'-u)}{u-a'-b'+1}, \qquad (1)$$

En donde

$$a = c_1 p_1,\ b = c_2 p_2,\ a' = 1 - c_1 (1 - p_1),\ b' = 1 - c_2 (1 - p_2).$$

Las condiciones de limitación son las siguientes: que el valor de u debe ser escogido de tal forma que sobrepase cada una de las tres cantidades

$$a,\ b,\ \text{y}\ \ a' + b' - 1,$$

y que al mismo tiempo sea menor que cada una de las tres cantidades

$$a',\ b',\ \text{y}\ \ a + b.$$

Exactamente como en la solución del problema anterior, puede mostrarse que la ecuación de segundo grado (1) tendrá una raíz y sólo una, que cumple estas condiciones. Las condiciones mismas fueron deducidas por la misma regla que antes,

exceptuando el que el límite menor $a' + b - 1$ se halló buscando el límite mayor de $1-z$.

Puede añadirse que las constantes en los datos, además de cumplir las condiciones dichas arriba, a saber, que las cantidades a', b' y $a + b$ deben sobrepasar individualmente a, b y $a' + b' - 1$ debe también satisfacer la condición $c_1 + c_2 \geqq 1$. Esto también se hace patente a partir de la aplicación de la regla.

6. PROBLEMA III.– Las probabilidades de dos sucesos A y B son a y b respectivamente, la probabilidad de que si el suceso A ocurre, un suceso E le acompañará es p, y la probabilidad de que si el suceso B ocurre, el mismo suceso E le acompañará es q. Se busca la probabilidad de que si el suceso A ocurre, el suceso B ocurrirá o *viceversa*, la probabilidad de que si B ocurre, A ocurrirá.

Representemos el suceso A por x y el suceso B por y, y el suceso E por z. Entonces, los datos son

$$\text{Prob. } x = a, \qquad \text{Prob. } y = b.$$
$$\text{Prob. } xz = ap, \qquad \text{Prob. } yz = bq.$$

A partir de lo cual se pide hallar

$$\frac{\text{Prob. } xy}{\text{Prob. } x} \text{ o } \frac{\text{Prob. } xy}{\text{Prob. } y}.$$

Sea

$$xy = s, \quad yz = t, \quad xy = w.$$

Eliminando z, tenemos, al reducir

$$s\bar{x} + t\bar{y} + sy\bar{t} + xt\bar{s} + xy\bar{w} + (1 - xy)\,w = 0,$$

$$\therefore w = \frac{s\bar{x} + t\bar{y} + sy\bar{t} + xt\bar{s} + xy}{2xy - 1}$$

$$= xyst + \frac{1}{0}\,x\bar{y}st + \frac{1}{0}\,\bar{x}yst + \frac{1}{0}\,\bar{x}\bar{y}st$$

$$+ \frac{1}{0}\,xys\bar{t} + 0x\bar{y}s\bar{t} + \frac{1}{0}\,\bar{x}ys\bar{t} + \frac{1}{0}\,\bar{x}\bar{y}s\bar{t}$$

$$+ \frac{1}{0}\,xy\bar{s}t + \frac{1}{0}\,x\bar{y}\bar{s}t + 0\bar{x}y\bar{s}t + \frac{1}{0}\,\bar{x}\bar{y}\bar{s}t$$

$$+ xy\bar{s}\bar{t} + 0x\bar{y}\bar{s}\bar{t} + 0\bar{x}y\bar{s}\bar{t} + 0\bar{x}\bar{y}\bar{s}\bar{t}. \qquad (1)$$

De donde, pasando de la Lógica al Algebra

$$\text{Prob. } xy = \frac{xyst + xy\bar{s}\,\bar{t}}{V},$$

siendo determinados x, y, s y t por el sistema de ecuaciones

$$\frac{xyst + x\bar{y}s\bar{t} + xy\bar{s}\,\bar{t} + x\bar{y}\,\bar{s}\,\bar{t}}{a} = \frac{xyst + \bar{x}y\bar{s}t + xy\bar{s}\,\bar{t} + \bar{x}y\bar{s}\,\bar{t}}{b}$$

$$= \frac{xyst + x\bar{y}s\bar{t}}{ap} = \frac{xyst + \bar{x}y\bar{s}t}{bq}$$

$$= xyst + x\bar{y}s\bar{t} + \bar{x}y\bar{s}t + xy\bar{s}\,\bar{t} + x\bar{y}\bar{s}\bar{t} + \bar{x}y\bar{s}\,\bar{t} + \bar{x}\bar{y}\bar{s}\bar{t} = V.$$

Para reducir el sistema anterior a una forma más conveniente, dividamos todos los miembros por $\bar{x}\bar{y}\,\bar{s}\,\bar{t}$, y en el resultado hagamos que

$$\frac{xs}{\bar{x}\bar{s}} = m, \quad \frac{yt}{\bar{y}\bar{t}} = m', \quad \frac{x}{\bar{x}} = n, \quad \frac{y}{\bar{y}} = n'.$$

Entonces, encontramos

$$\frac{mm' + m + nn' + n}{a} = \frac{mm' + m' + nn' + n'}{b}$$

$$= \frac{mm' + m}{ap} = \frac{mm' + m'}{bq}$$

$$= mm' + m + m' + nn' + n + n' + 1.$$

también

$$\text{Prob. } xy = \frac{mm' + nn'}{mm' + m + m' + nn' + n + n' + 1}.$$

Estas ecuaciones pueden reducirse a la forma

$$\frac{mm' + m}{ap} = \frac{mm' + m'}{bq} = \frac{nn' + n}{a(1-p)} = \frac{nn' + n'}{b(1-q)}$$

$$= (m+1)(m'+1) + (n+1)(n'+1) - 1.$$

$$\text{Prob. } xy = \frac{mm' + nn'}{(m+1)(m'+1) + (n+1)(n'+1) - 1}.$$

Ahora, supóngase

$$(m+1)\,(m'+1) = \frac{\mu}{\nu+\mu-1}, \quad (n+1)\,(n'+1) = \frac{\nu}{\nu+\mu-1}. \tag{2}$$

Entonces, puesto que

$$mm' + m = \frac{m\,(m'+1)\,(m+1)}{m+1} = \frac{m\mu}{(m+1)\,(\nu+\mu-1)},$$

y lo mismo para los otros numeradores del sistema; tenemos, al sustituir y multiplicar cada miembro del sistema por $\nu+\mu-1$, los siguientes resultados:

$$\frac{m\mu}{(m+1)\,ap} = \frac{m'\mu}{(m'+1)\,bq} = \frac{n\nu}{(n+1)\,a\,(1-p)} = \frac{n'\nu}{(n'+1)\,b(1-q)} = 1.$$

$$\text{Prob.}\, xy = (mm' + nn')\,(\nu+\mu-1). \tag{3}$$

A partir del anterior sistema tenemos

$$\frac{m}{m+1} = \frac{ap}{\mu},$$

De donde

$$m = \frac{ap}{\mu - ap}.$$

similarmente

$$m' = \frac{bq}{\mu - bq}, \quad n = \frac{a\,(1-p)}{\nu - a\,(1-p)}, \quad n' = \frac{b\,(1-q)}{\nu - b\,(1-q)}.$$

De aquí

$$m+1 = \frac{\mu}{\mu - ap}, \quad n+1 = \frac{\nu}{\nu - a\,(1-p)}, \quad \&c.$$

Sustituir estos valores en (2) reducido a la forma

$$\nu+\mu-1 = \frac{\mu}{(m+1)\,(m'+1)} = \frac{\nu}{(n+1)\,(n'+1)},$$

y tenemos

$$\nu + \mu - 1 = \frac{(\mu - ap)\,(\mu - bq)}{\mu} = \frac{\{\nu - a\,(1-p)\}\,\{\nu - b\,(1-q)\}}{\nu}. \qquad (4)$$

Sustituir también por m, m', etc. sus valores en (3) y tenemos

$$\text{Prob. } xy$$
$$= \left[\frac{abpq}{(\mu - ap)\,(\mu - bq)} + \frac{ab\,(1-p)\,(1-q)}{\{\nu - a\,(1-p)\}\,\{\nu - b\,(1-q)\}}\right](\nu + \mu - 1)$$
$$= \frac{abpq}{\mu} + \frac{ab\,(1-p)\,(1-q)}{\nu} \text{ by (4).}$$

Ahora bien, la primera ecuación del sistema (4) da

$$\nu + \mu - 1 = \mu - ap - bq + \frac{apbq}{\mu},$$
$$\therefore \frac{abpq}{\mu} = \nu - 1 + ap + bq. \qquad (5)$$

Similarmente

$$\frac{ab\,(1-p)\,(1-q)}{\nu} = \mu - 1 + a\,(1-p) + b\,(1-q).$$

Sumando estas ecuaciones y observando que el primer miembro del resultado es igual a la expresión que acabamos de hallar para la Prob. xy tenemos

$$\text{Prob. } xy = \nu + \mu + a + b - 2.$$

Representemos la Prob. xy por u y sea $a + b - 2 = m$, entonces

$$\mu + \nu = u - m. \qquad (6)$$

De nuevo a partir de (5) tenemos

$$\mu\nu = abpq - (ap + bq - 1)\,\mu. \qquad (7)$$

Similarmente, a partir de los miembros primero y tercero de (4) considerados como equivalentes tenemos

$$\mu\nu = ab\,(1-p)\,(1-q) - \{a\,(1-p) + b\,(1-q) - 1\}\,\nu.$$

Representemos $ap + bq - 1$ por h, y $a(1-p)+b(1-q)-1$ por h'. Al equiparar los valores anteriores de $\mu\nu$ hallamos

$$h\mu - h'\nu = ab\{pq + (1-p)(1-q)\}$$
$$= ab(p + q - 1).$$

sea $ab(p + q - 1) = l$, entonces

$$h\mu - h'\nu = l. \tag{8}$$

Ahora a partir de (6) y (8) tenemos

$$\mu = \frac{h'(u-m)+l}{m}, \quad \nu = \frac{h(u-m)-l}{m}.$$

Sustituir estos valores en (7) reducida a la forma

$$\mu(\nu + h) = abpq,$$

y tenemos

$$(hu - l)\{h'(u-m) + l\} = abpqm^2, \tag{9}$$

una ecuación de segundo grado, cuya solución determina u, el valor buscado de la Prob. xy.

La solución puede ponerse rápidamente en la forma

$$h = \frac{lh' + h(h'm - l) \pm \sqrt{[\{lh' - h(h'm-l)\}^2 + 4hh'abpqm^2]}}{2hh'}.$$

Pero si más adelante observamos que

$$lh' - h(h'm - l) = l(h + h') - hh'm = (l - hh')m,$$

puesto que

$$h = ap + bq - 1, \quad h' = a(1-p) + b(1-q) - 1,$$

de donde

$$h + h' = a + b - 2 = m,$$

encontramos

$$\text{Prob. } xy = \frac{lh' + h(h'm - l) \pm m\sqrt{\{(l-hh')^2 + 4hh'abpq\}}}{2hh'}. \tag{10}$$

queda por determinar qué signo ha de darse al radical. Podemos averiguarlo por medio del método general ejemplificado en el último problema, pero es mucho más

fácil y satisface totalmente las necesidades del caso actual, determinar el signo por medio de una comparación de la fórmula anterior con el resultado adecuado a algún caso conocido. Por ejemplo, si fuera cierto que el suceso A es *siempre*, y el suceso B *nunca*, asociado con el suceso E, entonces es cierto que los sucesos A y B nunca se dan juntos. De aquí que si $p = 1$, $q = 0$, deberíamos tener $u = 0$. Ahora bien, las suposiciones $p = 1, q = 0$ dan

$$h = a - 1, \quad h' = b - 1, \quad l = 0, \quad m = a + b - 2.$$

Sustituyendo en (10) tenemos

$$\text{Prob. } xy = \frac{(a-1)\,b-1)\,(a+b-2) \pm (a+b-2)\,(a-1)\,(b-1)}{2\,(a-1)\,(b-1)},$$

y esta expresión se hace cero cuando se toma el signo más bajo.

Por consiguiente, la solución final del problema general quedará expresada en la forma

$$\frac{\text{Prob. } xy}{\text{Prob. } x} = \frac{lh' + h\,(h'm - l) - m\sqrt{\{(l - hh')^2 + 4hh'abpq\}}}{2ahh'},$$

en donde

$$h = ap + bq - 1, \quad h' = a\,(1 - p) + b\,(1 - q) - 1,$$
$$l = ab\,(p + q - 1), \quad m = a + b - 2.$$

Como los términos en la solución lógica final afectados por el coeficiente $\frac{1}{0}$ son los mismos que los del primer problema de este capítulo, las condiciones entre las constantes serán las mismas, a saber

$$ap \gtreqless 1 - b\,(1 - q), \quad bq \gtreqless 1 - a\,(1 - p).$$

7. Es una confirmación de la corrección de la solución anterior el que la expresión obtenida sea simétrica con respecto a los dos grupos de cantidades p, q y 1–p, $1-q$, es decir, que al cambiar p por 1–p y q por $1-q$, la expresión queda inalterada. Esto es evidente a partir de la ecuación

$$\text{Prob. } xy = ab\left\{\frac{pq}{\mu} + \frac{(1-p)\,(1-q)}{\nu}\right\}$$

empleada al deducir el resultado final. Ahora bien, si hay probabilidades p, q del suceso E, como consecuente del conocimiento de los acaecimientod de A y B, hay probabilidades $1-p$, $1-q$ del suceso contrario, esto es, del no acaecimiento de E bajo las mismas circunstancias. Entonces como los datos no cambian en su forma, tanto si tenemos en cuenta en ellos el acaecimiento o el no–acaecimiento de E, es

evidente que la solución debería ser, como es, una función simétrica de p, q y $1-p$, $1-q$.

Examinemos el caso particular en que $p = 1, q = 1$. Encontramos

$$h = a + b - 1, \quad h' = -1, \quad l = ab, \quad m = a + b - 2,$$

y sustituyendo

$$\frac{\text{Prob. } xy}{\text{Prob. } x} = \frac{-ab + (a+b-1)(2-a-b-ab) - (a+b-2)(ab-a-b+1)}{-2a(a+b-1)}$$

$$= \frac{-2ab(a+b-1)}{-2a(a+b-1)} = b.$$

Parecería, entonces, que en este caso los sucesos A y B son virtualmente independientes entre sí. La suposición de su asociación invariable con algún otro suceso E, de la frecuencia de cuyo acaecimiento, excepto como puede deducirse de esta conexión particular, no se sabe absolutamente nada, no establece ninguna dependencia entre los sucesos A y B. Sospecho que esta conclusión está de acuerdo con la razón, aunque algunos ejemplos determinados pueden indicar a primera vista un resultado diferente. Por ejemplo, si las probabilidades de que apareciesen, primero una especie determinada de alga, segundo una cierta clase de zoofitos sobre la orilla del mar, han sido determinadas por separado, y si también se ha averiguado que ninguno de estos sucesos pudo ocurrir excepto durante el movimiento de las olas causado por una tempestad pienso que, justificadamente, la conclusión sería que los sucesos en cuestión no eran independientes. El recoger un trozo de alga marina que se ha supuesto haría más probable el descubrimiento de los zoofitos de lo que hubiera sido de otro modo. Sospecho que este hecho se debe a nuestro conocimiento de otra circunstancia no implicada en las condiciones reales del problema, a saber, que el acaecimiento de una tempestad es un fenómeno *ocasional*. Confinemos nuestro campo de observación a un mar *siempre* tormentoso. Entonces, yo supongo que se vería que el arrojar las algas y los zoofitos deberían considerarse como sucesos independientes. Ahora bien, para hablar más en general, hay condiciones comunes a todos los fenómenos – condiciones que, se cree, no afectan su independencia mutua. Sospecho, por lo tanto, que la solución indica que cuando una condición particular ha predominado a través de todas nuestras *experiencias registradas,* toma el carácter anterior con referencia a la clase de fenómenos sobre los que esa experiencia se ha extendido.

8. PROBLEMA IV.– Para ilustrar de alguna forma las observaciones anteriores, séanos dada, además de los datos del último problema, la probabilidad absoluta del suceso E, siendo el sistema completo de datos:

$$\text{Prob. } x = a, \quad \text{Prob. } y = b, \quad \text{Prob. } z = c,$$
$$\text{Prob. } xz = ap, \quad \text{Prob. } yz = bq,$$

y pídase hallar la Prob. xy.

Suponiendo, como antes, $xz = s$, $yz = t$, $xy = w$, la ecuación lógica final es

$$w = xystz + xy\bar{s}\bar{t}\bar{z} + 0\,(x\bar{y}s\bar{t}z + \bar{x}y\bar{s}tz + x\bar{y}\bar{z}\bar{s}\bar{t} + xy\bar{z}\bar{s}\bar{t} + \bar{x}\bar{y}z\bar{s}\bar{t} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{s}t). \quad (1)$$

$$+ \text{terminos cuyos coeficientes son } \frac{1}{0}$$

Habiéndose formado el sistema algebraico, las siguientes eliminaciones pueden simplificarse por las transformaciones adoptadas en el problema anterior. El resultado final es

$$\text{Prob. } xy = ab\left\{\frac{pq}{c} + \frac{(1-p)(1-q)}{1-c}\right\}. \quad (2)$$

Las condiciones entre las constantes son:

$$c \overline{=}> ap, \quad c \overline{=}> bq, \quad c \overline{=}< 1 - a(1-p), \quad c \overline{=}< 1 - b(1-q).$$

Ahora bien, si $p = 1, q = 1$, hallamos

$$\text{Prob. } xy = \frac{ab}{c},$$

no admitiendo c ningún valor menor que a o b. Se sigue de aquí que si el suceso E se sabe que es *ocasional*, su invariable presencia en los sucesos x e y aumenta la probabilidad de su conjunción en la proporción inversa de su propia frecuencia.

La fórmula (2) puede verificarse en un gran número de casos. Como un ejemplo particular, sea $q = c$, y tenemos

$$\text{Prob. } xy = ab. \quad (3)$$

Ahora bien, la suposición $q = c$ implica, por Definición (Capítulo XVI) la independencia de los sucesos B y E. Entonces, si B y E son independientes, ninguna relación que pueda haber entre A y E puede establecer una relación entre A y B; por lo cual A y B son también independientes, tal como la anterior ecuación (3) implica.

Puede mostrarse fácilmente a partir de (2) que el valor de la Prob. z que hace a la Prob. xy un mínimo, es

$$\text{Prob. } z = \frac{\sqrt{(pq)}}{\sqrt{(pq)} + \sqrt{(1-p)(1-q)}}.$$

Si $p = q$ esto da

$$\text{Prob. } z = p;$$

un resultado cuya corrección puede mostrarse con las mismas consideraciones que han sido aplicadas a (3).

PROBLEMA V.— Dadas las probabilidades de cualesquiera tres sucesos y la probabilidad de su conjunción, se busca la probabilidad de la conjunción de cualesquiera dos de ellos.

Supóngase que los datos son:

$$\text{Prob. } x = p, \quad \text{Prob. } y = q, \quad \text{Prob. } z = r, \quad \text{Prob. } xyz = m,$$

y el quaesitum es la Prob. xy.

Suponiendo $xyz = s$, $xy = t$, tenemos como ecuación lógica final

$$t = xyzs + xyz\bar{s} + 0(x\bar{y}\bar{s} + \bar{x}\bar{s}) + \frac{1}{0} \text{ (suma de todos los otros constituyentes).}$$

de donde, finalmente

$$\text{Prob. } xy = \frac{H - \sqrt{(H^2 - 4pq\bar{r}^2 - 4\bar{p}\bar{q}\bar{r}m)}}{2\bar{r}},$$

en donde

$$\bar{p} = 1 - p, \text{ &c.} \qquad H = \bar{p}\bar{q} + (p + q)\bar{r}.$$

Esto admite comprobación cuando $p = 1$, cuando $q = 1$, cuando $r = 0$ y, por lo tanto, $m = 0$, etc.

Si se hubiera omitido la condición, Prob. $z = r$, la solución habría sido también determinada. Deberíamos haber tenido

$$\text{Prob. } xy = \frac{pq(1 - m) + (1 - p)(1 - q)m}{1 - m};$$

y puede añadirse, como confirmación definitiva de su corrección, que los resultados anteriores son idénticos cuando $m = pqr$.

9. El siguiente problema es una generalización del Problema I y su solución, aunque necesariamente más compleja, se obtiene por medio de un análisis similar.

PROBLEMA VI.— Si un suceso puede sólo ocurrir como consecuencia de una o más de entre unas determinadas causas $A_1, A_2, \ldots A_n$, y si generalmente c_i representa la probabilidad de la causa A_i, y P_i a probabilidad de que si la causa A_i existe, el suceso E ocurrirá, siendo dados entonces una serie de valores de c_i y p_i, se busca la probabilidad del suceso E (24).

Representemos las causas $A_1, A_2, \ldots A_n$ por $x_1, x_2, \ldots x_n$, y el suceso E por z.

Entonces, tenemos generalmente,

$$\text{Prob. } x_i = c_i, \qquad \text{Prob. } x_i z = c_i p_i.$$

Además, la condición de que E puede sólo suceder en conexión con alguna o más de las causas $A_1, A_2, \ldots A_n$ establece la condición lógica

$$z(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n) = 0. \tag{1}$$

Ahora supongamos en general

$$x_i z = t_i,$$

que es reducible a la forma

$$x_i z(1-t_i) + t_i(1-x_i z) = 0,$$

formando el tipo de un sistema de n ecuaciones que, junto con (1) expresa las condiciones lógicas del problema. Sumando todas estas ecuaciones, tal como podemos hacer después de la anterior reducción, tenemos

$$\Sigma\{x_i z(1-t_i) + t_i(1-x_i z)\} + z(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n) = 0, \tag{2}$$

(extendiéndose desde $i = 1$ a $i = n$ la suma supuesta por Σ) y ésta única y suficiente ecuación lógica, junto con los 2n datos, representados por las ecuaciones generales

$$\text{Prob. } x_i = c_i, \quad \text{Prob. } t_i = c_i p_i, \tag{3}$$

constituyen los elementos a partir de los que tenemos que determinar la Prob. z.

Desarróllese (2) con respecto a z. Tenemos

$$[\Sigma\{x_i(1-t_i) + t_i(1-x_i)\} + (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)]\, z + \Sigma t_i(1-z) = 0,$$

por consiguiente

$$z = \frac{\Sigma t_i}{\Sigma t_i - \Sigma\{x_i(1-t_i) + t_i(1-x_i)\} - (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}. \tag{4}$$

Ahora bien, cualquier constituyente en la expansión del segundo miembro de la ecuación anterior constará de 2n factores, de los que n son sacados del conjunto x_1, $x_2, \ldots x_n, 1-x_1, 1-x_2, \ldots 1-x_n$ y n del grupo $t_1, t_2, \ldots t_n, 1-t_1, 1-t_2, \ldots 1-t_n$, no siendo admisibles combinaciones como $x_1(1-x_1)$, $t_1(1-t_1)$. Consideremos primero aquellos constituyentes de los que $(1-t_1)(1-t_2)\ldots(1-t_n)$ forma el factor t, es decir, el factor derivado del conjunto $t_1, \ldots 1-t_1$.

Se encontrará el coeficiente de cualquier constituyente cambiando $t_1, t_2, \ldots t_n$ respectivamente por 0 en el segundo miembro de (4), y asignando entonces a continuación a $x_1, x_2, \ldots x_n$ sus valores como dependientes de la naturaleza del factor x del constituyente. Ahora bien, sustituyendo simplemente por $t_1, t_2, \ldots t_n$ el valor 0, el segundo miembro se convierte en

$$\frac{0}{-\Sigma x_i - (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)},$$

y éste se hace cero cualquiera que sean los valores 0, 1 que asignemos a continuación a $x_1, x_2, \ldots x_n$. Pues si esos valores no son todos iguales a 0, el término Σx_i no se hace cero y si todos son iguales a 0, el término $-(1-x_1)\ldots(1-x_n)$ pasa a ser -1, de manera que en cualquier caso el denominador no se hace cero y por lo tanto la fracción sí.

De aquí que los coeficientes de todos los constituyentes de los que $(1-t_1)\ldots(1-T¿)$ es un factor será 0 y como la suma de todos los constituyentes $-x$ posibles es la unidad, habrá un término agrupado $0(1-t_1)\ldots(1-t_n)$ en el desarrollo de z.

Considerar, a continuación, cualquier constituyente cuyo factor t es $t_1 t_2 \ldots t_r (1-t_{r+1}) \ldots (1-t_n)$, siendo r igual o mayor que la unidad. Haciendo en el segundo miembro de (4), $t_1 = 1, \ldots t_r = 1$, $t_{r+1} = 0, \ldots t_n = 0$, tenemos la expresión

$$\frac{r}{x_1 \ldots + x_r - x_{r+1} \ldots - x_n - (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}.$$

Ahora bien, siendo 0 y 1 los únicos valores admisibles de los símbolos, es evidente que la expresión anterior será igual a 1 cuando $x_1 = 1 \ldots x_r = 1$, $x_{r+1} = 0$, $\ldots x¿ ¿ 0$ y que para todas las otras combinaciones del valor esa expresión asumirá un valor mayor que la unidad. Por lo tanto, se aplicará el coeficiente 1 a todos los constituyentes del desarrollo final que tienen la forma

$$x_1 \ldots x_r (1-x_{r+1}) \ldots (1-x_n)\, t_1 \ldots t_r (1-t_{r+1}) \ldots (1-t_n),$$

siendo el factor x similar al factor t, mientras que otros constituyentes incluidos en el caso actual tendrán el coeficiente virtuál $\frac{1}{0}$. También está claro que este razonamiento es independiente de la disposición particular y sucesión de los símbolos individuales.

De aquí que el desarrollo completo de z será así

$$z = \Sigma(XT) + 0(1-t_1)(1-t_2)\ldots(1-t_n) \qquad (5)$$
$$+ \text{constituyentes cuyos coeficientes son } \frac{1}{0}$$

donde T representa cualquier constituyente t excepto $(1-t_1)\ldots(1-t_n)$ y x el constituyente correspondiente o similar de $(x_1 \ldots x_n)$

Por ejemplo, si $n = 2$, tendremos

$$\Sigma(XT) = x_1 x_2 t_1 t_2 + x_1 \bar{x}_2 t_1 \bar{t}_2 + \bar{x}_1 x_2 \bar{t}_1 t_2,$$

representando $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, etc. a $1-x_1$, $1-x_2$, etc. por lo cual

$$z = x_1 x_2 t_1 t_2 + x_1 \bar{x}_2 t_1 \bar{t}_2 + \bar{x}_1 x_2 \bar{t}_1 t_2$$
$$+ 0(x_1 x_2 \bar{t}_1 \bar{t}_2 + x_1 \bar{x}_2 \bar{t}_1 \bar{t}_2 + \bar{x}_1 x_2 \bar{t}_1 \bar{t}_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{t}_1 \bar{t}_2) \qquad (6)$$
$$+ \text{constituyentes cuyos coeficientes son } \frac{1}{0}$$

Este resultado concuerda, admitiéndose una diferencia de notación, con la forma desarrollada de z en el Problema I de este capítulo, tal como evidentemente debería concordar.

10. Para evitar la complejidad, propongo deducir a partir de la ecuación anterior (6) las condiciones necesarias para la determinación de la Prob. z para el caso particular en que $n = 2$, de tal forma que pueda capacitarnos, siguiendo con el pensamiento la misma línea de investigación, asignar las condiciones correspondientes para el caso más general en el que n posee cualquier valor integral.

Suponiendo, pues, que $n = 2$ tenemos

$$V = x_1 x_2 t_1 t_2 + x_1 \bar{x}_2 t_1 \bar{t}_2 + \bar{x}_1 x_2 \bar{t}_1 t_2 + x_1 x_2 \bar{t}_1 \bar{t}_2 + x_1 \bar{x}_2 \bar{t}_1 \bar{t}_2 + \bar{x}_1 x_2 \bar{t}_1 \bar{t}_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{t}_1 \bar{t}_2.$$

$$\text{Prob. } z = \frac{x_1 x_2 t_1 t_2 + x_1 \bar{x}_2 t_1 \bar{t}_2 + \bar{x}_1 x_2 \bar{t}_1 t_2}{V},$$

siendo las condiciones para la determinación de x_1, t_1, etc.

$$\frac{x_1 x_2 t_1 t_2 + x_1 \bar{x}_2 t_1 \bar{t}_2 + x_1 x_2 \bar{t}_1 \bar{t}_2 + x_1 \bar{x}_2 \bar{t}_1 \bar{t}_2}{c_1}$$

$$= \frac{x_1 x_2 t_1 t_2 + \bar{x}_1 x_2 \bar{t}_1 t_2 + x_1 x_2 \bar{t}_1 \bar{t}_2 + \bar{x}_1 x_2 \bar{t}_1 \bar{t}_2}{c_2}$$

$$= \frac{x_1 x_2 t_1 t_2 + x_1 \bar{x}_2 t_1 \bar{t}_2}{c_1 p_1} = \frac{x_1 x_2 t_1 t_2 + \bar{x}_1 x_2 \bar{t}_1 t_2}{c_2 p_2} = V.$$

Dividir los miembros de este sistema de ecuaciones por $\bar{x}_1$ $\bar{x}_2$ $\bar{t}_1$ $\bar{t}_2$, y el numerador y denominador de la Prob. z por la misma cantidad, y en los resultados suponer

$$\frac{x_1 t_1}{\bar{x}_1 \bar{t}_1} = m_1, \quad \frac{x_2 t_2}{\bar{x}_2 \bar{t}_2} = m_2, \quad \frac{x_1}{\bar{x}_1} = n_1, \quad \frac{x_2}{\bar{x}_2} = n_2; \tag{7}$$

encontramos

$$\text{Prob. } z = \frac{m_1 m_2 + m_1 + m_2}{m_1 m_2 + m_1 + m_2 + n_1 n_2 + n_1 + n_2 + 1},$$

y

$$\frac{m_1 m_2 + m_1 + n_1 n_2 + n_1}{c_1} = \frac{m_1 m_2 + m_2 + n_1 n_2 + n_2}{c_2}$$

$$= \frac{m_1 m_2 + m_1}{c_1 p_1} = \frac{m_1 m_2 + m_2}{c_2 p_2} = m_1 m_2 + m_1 + m_2 + n_1 n_2 + n_1 + n_2 + 1, \tag{8}$$

de donde, si hacemos

$$(m_1 + 1)(m_2 + 1) = M, \quad (n_1 + 1)(n_2 + 1) = N, \tag{9}$$

tenemos, después de una pequeña reducción

$$\text{Prob. } z = \frac{M - 1}{M + N - 1},$$

$$\frac{n_1(n_2+1)}{c_1(1-p_1)} = \frac{n_2(n_1+1)}{c_2(1-p_2)} = \frac{m_1(m_2+1)}{c_1 p_1} = \frac{m_2(m_1+1)}{c_2 p_2} = M + N - 1;$$

or,

$$\frac{m_1 M}{(m_1+1)c_1 p_1} = \frac{m_2 M}{(m_2+1)c_2 p_2} = \frac{n_1 N}{(n_1+1)c_1(1-p_1)}$$

$$= \frac{n_2 N}{(n_2+1)c_2(1-p_2)} = M + N - 1.$$

Ahora bien, llevemos a cabo en el pensamiento una serie de transformaciones y reducciones en la ecuación lógica final (5). Obtendremos para la determinación de la Prob. z la siguiente expresión:

$$\text{Prob. } z = \frac{M - 1}{M + N - 1}, \tag{10}$$

en donde

$$M = (m_1 + 1)(m_2 + 1) \ldots (m_n + 1),$$

$$N = (n_1 + 1)(n_2 + 1) \ldots (n_n + 1),$$

siendo dadas $m_1, \ldots m_n$, $n_1 \ldots n_n$ por el sistema de ecuaciones

$$\frac{m_1 M}{(m_1+1)c_1 p_1} = \frac{m_2 M}{(m_2+1)c_2 p_2} \ldots = \frac{m_n M}{(m_n+1)c_n p_n}$$

$$= \frac{n_1 N}{(n_1+1)c_1(1-p_1)} \ldots = \frac{n_n N}{(n_n+1)c_n(1-p_n)} = M + N - 1. \tag{11}$$

Para simplificar todavía más los resultados, suponer

$$\frac{M + N - 1}{M} = \frac{1}{\mu}, \quad \frac{M + N - 1}{N} = \frac{1}{\nu};$$

de donde

$$M = \frac{\mu}{\mu + \nu - 1}, \quad N = \frac{\nu}{\mu + \nu - 1}.$$

encontramos

$$\frac{m_1}{(m_1+1)\,c_1p_1} = \frac{m_2}{(m_2+1)\,c_2p_2} \cdot \cdot = \frac{m_n}{(m_n+1)\,c_np_n} = \frac{1}{\mu},$$

$$\frac{n_1}{(n_1+1)\,c_1(1-p_1)} = \frac{n_2}{(n_2+1)\,c_2(1-p_2)} \cdot \cdot = \frac{n_n}{(n_n+1)\,c_n(1-p_n)} = \frac{1}{\nu};$$

de donde

$$m_1 = \frac{c_1p_1}{\mu - c_1p_1}, \cdot \cdot m_n = \frac{c_np_n}{\mu - c_np_n};$$

y finalmente

$$m_1 + 1 = \frac{\mu}{\mu - c_1p_1}, \cdot \cdot m_n + 1 = \frac{\mu}{\mu - c_np_n},$$

$$n_1 + 1 = \frac{\nu}{\nu - c_1(1-p_1)}, \cdot \cdot n_n + 1 = \frac{\nu}{\nu - c_n(1-p_n)}.$$

Sustituir estos valores con los de M y N en (9) y tenemos

$$\frac{\mu^n}{(\mu - c_1p_1)\,(\mu - c_2p_2) \cdot \cdot (\mu - c_np_n)} = \frac{\mu}{\mu + \nu - 1},$$

$$\frac{\nu^n}{\{\nu - c_1(1-p_1)\}\,\{\nu - c_2(1-p_2)\} \cdot \cdot \{\nu - c_n(1-p_n)\}} = \frac{\nu}{\mu + \nu - 1},$$

que puede ser reducida a la forma simétrica

$$\mu + \nu - 1 = \frac{(\mu - c_1p_1) \cdot \cdot (\mu - c_np_n)}{\mu^{n-1}}$$

$$= \frac{\{\nu - c_1(1-p_1)\} \cdot \cdot \{\nu - c_n(1-p_n)\}}{\nu^{n-1}}. \qquad (12)$$

finalmente

$$\text{Prob. } z = \frac{M-1}{M+N-1} = 1 - \nu. \tag{13}$$

Supongamos entonces $1-\nu = u$, tenemos así

$$\mu - u = \frac{(\mu - c_1 p_1) \,..\, (\mu - c_n p_n)}{\mu^{n-1}}$$
$$= \frac{\{1 - c_1 (1 - p_1) - u\} \,..\, \{1 - c_n (1 - p_n) - u\}}{(1-u)^{n-1}}.$$

si para simplificar ponemos

$$c_1 p_1 = a_1, \qquad c_n p_n = a_n, \qquad 1 - c_1 (1 - p_1) = b_1, \text{ \&c.,}$$

las ecuaciones anteriores pueden escribirse así:

$$\mu - u = \frac{(\mu - a_1) \,..\, (\mu - a_n)}{\mu^{n-1}},$$

en donde

$$\mu = u + \frac{(b_1 - u) \,..\, (b_n - u)}{(1-u)^{n-1}}. \tag{14}$$

Sustituido este valor de μ en (14) dará una ecuación que implica sólo a u, cuya solución determinará la Prob. z puesto que por (13) la Prob. $z = u$. Queda ahora asignar los límites de u.

11. Ahora bien, el mismo análisis por el que se determinaron los límites en el caso particular en que $n = 2$, (XIX. 12) nos lleva en este caso al siguiente resultado. La cantidad u, a fin de que pueda representar el valor de la Prob. z, debe tener para sus límites inferiores las cantidades $a_1, a_2, \ldots a_n$, y para sus límites superiores las cantidades $b_1, b_2, \ldots b_n$, $a_1 + a_2 \ldots + a_n$. Podemos inferir por lo tanto, *a priori*, que siempre existirá una raíz y sólo una raíz, de la ecuación (14) que satisfaga estas condiciones. Considero suficiente, para una comprobación práctica, mostrar que existirá una, y sólo una, raíz de la ecuación (14), entre los límites $a_1, a_2 \ldots a_n$ y $b_1, b_2, \ldots b_n$.

Consideremos primero la naturaleza de los cambios a los que está sujeto μ en (15), cuando u varía desde a_1, el cual suponemos que es el mayor de sus límites menores, hasta b_1, el cual suponemos que es el menor de sus límites mayores.

Cuando $u = a_1$, es evidente que μ es positivo y mayor que a_1. Cuando $u = b_1$, tenemos $\mu = b_1$, que también es positivo. Entre los límites $u = a_1$, $u = b_1$, puede mostrarse que μ aumenta con u. Así tenemos

$$\frac{d\mu}{du} = 1 - \frac{(b_2 - u)\,..\,(b_n - u)}{(1-u)^{n-1}} - \frac{(b_1 - u)\,(b_3 - u)\,..\,(b_n - u)}{(1-u)^{n-1}} \cdots\cdot$$
$$+ (n-1)\,\frac{(b_1 - u)\,(b_2 - u)\,..\,(b_n - u)}{(1-u)^n}. \qquad (16)$$

Ahora sea

$$\frac{c_1\,(1-p_1) - u\}\,..\,\{1 - c_n\,(1-p_n}{(1-u)^{n-1}}$$

Evidentemente, $x_1, x_2, \ldots x_n$ serán fracciones cabales y tenemos

$$\frac{d\mu}{du} = 1 - x_2 x_3 \ldots x_n - x_1 x_3 \ldots x_n \ldots - x_1 x_2 \ldots x_{n-1} + (n-1)\,x_1 x_2 \ldots x_n$$
$$= 1 - (1 - x_1)\,x_2 x_3 \ldots x_n - x_1\,(1 - x_2)\,x_3 \ldots x_n \ldots$$
$$- x_1 x_2 \ldots x_{n-1}\,(1 - x_n) - x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Ahora bien, los términos negativos en el segundo miembro son (si podemos tomar prestado el lenguaje de los desarrollos lógicos) constituyentes formados a partir de cantidades fraccionales $x_1, x_2, \ldots x_n$. Su suma no puede por tanto exceder la unidad; de donde $\frac{d\mu}{du}$ es positivo, y μ aumenta con u entre los límites especificados.

Ahora bien, escribamos (14) de la forma

$$\frac{(\mu - a_1)\,..\,(\mu - a_n)}{\mu^{n-1}} - (\mu - u) = 0, \qquad (17)$$

y suponer $u = a_1$. El primer miembro se convierte en

$$(\mu - a_1)\left\{\frac{(\mu - a_2)\,..\,(\mu - a_n)}{\mu^{n-1}} - 1\right\}, \qquad (18)$$

y esta expresión es negativa en valor, pues haciendo idéntica suposición en (15) hallamos

$$\mu - a_1 = \frac{(b_1 - u)\,..\,(b_n - u)}{(1-u)^{n-1}} = \text{a una cantidad positiva.}$$

Al mismo tiempo tenemos

$$\frac{(\mu - a_2) \ldots (\mu - a_n)}{\mu^{n-1}} = \frac{\mu - a_2}{\mu} \ldots \frac{\mu - a_n}{\mu},$$

y puesto que los factores del segundo miembro son fracciones positivas, ese miembro es menor que la unidad, por lo que (18) es negativo. Por lo tanto, *la suposición* $u = 1$*¿ hace que el primer miembro de (17) sea negativo.*

En segundo lugar, sea $u = b_1$, entonces por (15) $\mu = u = b_1$ *y el primer miembro de (17) es positivo.*

En último lugar, entre los límites $u = a_1$, y $u = b_1$, el primer miembro de (17) aumenta continuamente, porque el primer término de esa expresión escrita bajo la forma

$$(\mu - a_1) \frac{\mu - a_1}{\mu} \ldots \frac{\mu - a_n}{\mu}$$

aumenta, ya que μ aumenta, y con ello, cada factor contenido en ella. De nuevo, el término negativo $\mu - u$, disminuye con el aumento de u, como es patente a partir de su valor deducido de (15), a saber

$$\frac{(b_1 - u) \ldots (b_n - u)}{(1 - u)^{n-1}}.$$

Por lo tanto, entre los límites $u = a_1$, $u = b_1$, el primer miembro de (17) aumenta continuamente, cambiando al hacerlo de un valor negativo a uno positivo. Por lo tanto, entre los límites asignados existe un valor de u, y sólo uno, que satisface dicha ecuación.

12. Reuniendo estos resultados, llegamos a la siguiente solución del problema general.

La probabilidad del suceso E será ese valor de u deducido de la ecuación

$$\mu - u = \frac{(\mu - c_1 p_1) \ldots (\mu - c_n p_n)}{\mu^{n-1}}, \tag{19}$$

en donde

$$\mu = u + \frac{\{1 - c_1 (1 - p_1) - u\} \ldots \{1 - c_n (1 - p_n) - u\}}{(1 - u)^{n-1}},$$

cuyo (valor) se halla entre los dos grupos de cantidades

$$c_1 p_1,\ c_2 p_2, \ldots c_n p_n \quad \text{y} \quad 1 - c_1 (1 - p_1),\ 1 - c_2 (1 - p_2) \ldots 1 - c_n (1 - p_n),$$

siendo el primer grupo su límite inferior y el último su límite superior.

Y además puede deducirse en el caso general, tal como se ha demostrado en el caso particular de $n = 2$, que el valor de u, determinado como arriba, no sobrepasará la cantidad

$$c_1p_1 + c_2p_2 \ldots + c_np_n.$$

13. Se adjuntan una serie de comprobaciones particulares.

PRIMERO.– Sean $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $\ldots p_n = 1$. Esto es suponer con certeza que si ocurre cualquiera de los sucesos A_1, $A_2 \ldots A_n$, el suceso E ocurrirá. En este caso, entonces, la probabilidad del acaecimiento de E será simplemente la probabilidad de que los sucesos o causas A_1, $A_2 \ldots A_n$ no dejan de suceder, y su expresión será, por lo tanto $1 - (1 - c_1)(1 - c_2) \ldots (1 - c_n)$.

Ahora bien, la solución general (19) da

$$\mu - u = \frac{(\mu - c_1) \ldots (\mu - c_n)}{\mu^{n-1}},$$

donde

$$\mu = u + \frac{(1 - u)^n}{(1 - u)^{n-1}} = 1.$$

Por lo tanto,

$$1 - u = (1 - c_1) \ldots (1 - c_n),$$

$$\therefore\ u = 1 - (1 - c_1) \ldots (1 - c_n),$$

equivalente a la determinación *a priori* anterior.

En segundo lugar, sean $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_n = 0$, entonces (19) da

$$\mu - u = \mu,$$

$$\therefore\ u = 0,$$

como evidentemente debería ser.

En tercer lugar, sean c_1, $c_2 \ldots c_n$ cantidades pequeñas, de tal manera que sus cuadrados y productos pueden despreciarse. Entonces, desarrollando los segundos miembros de la ecuación (19),

$$\mu - u = \frac{\mu^n - (c_1p_1 + c_2p_2 \ldots + c_np_n)\,\mu^{n-1}}{\mu^{n-1}}$$

$$= \mu - (c_1p_1 + c_2p_2 \ldots + c_np_n),$$

$$\therefore\ u = c_1p_1 + c_2p_2 \ldots + c_np_n.$$

Ahora bien, esto es lo que la solución sería, siendo las causas A_1, $A_2 \ldots A_n$ mutuamente excluyentes.

Pero cuanto más pequeñas sean las probabilidades de esas causas, más se acercan a alcanzar la condición de ser mutuamente exclusivas, puesto que es más pequeña la probabilidad de cualquier coincidencia entre ellas. Por lo tanto, el resultado obtenido anteriormente será, sin duda, la forma limitante de la expresión para la probabilidad de E.

Cuarto.– En el caso particular de $n = 2$, podemos eliminar μ fácilmente de la solución general. El resultado es

$$\frac{(u - c_1p_1)\,(u - c_2p_2)}{c_1p_1 + c_2p_2 - u} = \frac{\{1 - c_1\,(1 - p_1) - u\}\,\{1 - c_2\,(1 - p_2) - u\}}{1 - u},$$

que coincide con la solución particular obtenida antes para este caso, Problema I.

Aunque por el sistema (19), la solución se hace depender en general de la solución de una ecuación de orden elevado, su dificultad práctica no será grande. Pues las condiciones relacionadas con los límites nos capacitan para seleccionar al momento un valor cercano a u y las formas del sistema (19) son adecuadas para los procesos de aproximación sucesiva.

14. PROBLEMA 7.– Siendo los datos los mismo que en el problema anterior, se busca la probabilidad de que si una combinación de causas $A_1, A_2, \ldots A_n$ definida y dada, se presenta, el suceso E se realizará.

Representando los casos $A_1, A_2, \ldots A_n$, como antes por $x_1, x_2, \ldots x_n$ respectivamente, sea la combinación definida de ellos, referida en el enunciado del problema, representada por $\phi\,(x_1, x_2 \ldots x_n)$ de tal forma que el acaecimiento real de esa combinación quede expresado por la ecuación lógica

$$\phi\,(x_1, x_2, \ldots x_n) = 1. \tag{1}$$

Los datos son

$$\begin{aligned} &\text{Prob. } x_1 = c_1, \ \ldots \ \text{Prob. } x_n = c_n, \\ &\text{Prob. } x_1 z = c_1p_1, \ \text{Prob. } x_n z = c_n p_n\,; \end{aligned} \tag{2}$$

y el objeto de la investigación es

$$\frac{\text{Prob. } \phi\,(x_1, x_2 \ldots x_n)\, z}{\text{Prob. } \phi\,(x_1, x_2 \ldots x_n)}. \tag{3}$$

Buscaremos primero el valor del numerador.

Supongamos

$$\begin{aligned} &x_1 z = t_1 \ldots x_n z = t_n, \\ &\phi\,(x_1, x_2 \ldots x_n)\, z = w. \end{aligned} \tag{4}$$

O, si para simplificar, representamos $\phi\,(x_1, x_2 \ldots x_n)$ por ϕ, la última ecuación será

$$\phi z = w, \tag{5}$$

a la que se debe añadir la ecuación

$$\bar{x}_1\,\bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n\,z = 0. \tag{6}$$

Ahora bien, cualquier ecuación $x_r z = t_r$ del sistema (3) puede reducirse a la forma

$$x_r z \bar{t}_r + t_r\,(1 - x_r z) = 0.$$

Similarmente, reduciendo (5), y sumando los diferentes resultados, obtenemos la ecuación lógica

$$\Sigma\,\{x_r z \bar{t}_r + t_r\,(1 - x_r z)\} + \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n z + \phi z \bar{w} + w(1 - \phi z) = 0, \tag{7}$$

en la que eliminando z, w debe ser determinado como una función lógica desarrollada de $x_1, \ldots x_n, t_1, \ldots t_n$.

Ahora, haciendo sucesivamente que $z = 1$, $z = 0$ en la ecuación anterior, y multiplicando los resultados, tenemos

$$\{\Sigma\,(x_r \bar{t}_r + \bar{x}_r t_r) + \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n + \phi\bar{w} + w\bar{\phi}\} \times (\Sigma t_r + w) = 0.$$

Desarrollando esta ecuación con referencia a w y sustituyendo en el resultado $\Sigma\, t_r + 1$ por 1, de acuerdo con la Proposición I, Capítulo IX, tenemos

$$Ew + E'\,(1 - w) = 0\,;$$

en donde

$$E = \Sigma\,(x_r \bar{t}_r + t_r \bar{x}_r) + \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n + \bar{\phi},$$

$$E' = \Sigma t_r\,\{\Sigma\,(x_r \bar{t}_r + t_r \bar{x}_r) + \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n + \phi\}.$$

y, por lo tanto,

$$w = \frac{E'}{E' - E}. \tag{8}$$

Debe desarrollarse ahora el segundo miembro de esta ecuación con respecto a la doble serie de símbolos $x_1, x_2, \ldots x_n, t_1, t_2, \ldots t_n$. Para llevar a cabo este objetivo, será más conveniente colocar los constituyentes del desarrollo final en tres clases diferentes y determinar los coeficientes adecuados a esas clases separadamente.

Primero, consideremos esos constituyentes en los que $\bar{t}_1 \ldots \bar{t}_n$ es un factor. Haciendo $t_1 = 0 \ldots t_n = 0$, hallamos

$$E' = 0,\ E = \Sigma x_r + \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n + \bar{\phi}.$$

Es evidente que cualesquiera que sean los valores (0, 1) dados a los símbolos x, E no se hace cero. Por lo tanto, los coeficientes de todos los constituyentes que abarcan $\bar{t}_1 \ldots \bar{t}_n$ son 0.

Considérese, en segundo lugar, aquellos constituyentes que no abarcan el factor $\bar{t}_1 \ldots \bar{t}_n$, y que son simétricos con referencia a los dos grupos de símbolos $x_1 \ldots x_n$ y $t_1 \ldots t_n$. Por constituyentes simétricos quiere decirse aquellos que permanecerían inalterados si x_1 se convirtiera en t_1, x_2 en t_2, etc. y vice versa. Los constituyentes $x_1 \ldots x_n \; t_1 \ldots t_n$, $\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n \; \bar{t}_1 \ldots \bar{t}_n$, etc. son en este sentido simétricos.

Para todos los constituyentes simétricos es evidente que

$$\Sigma \, (x_r \, \bar{t}_r + t_r \, \bar{x}_r)$$

se hace cero. Para aquellos que no involucran a $\bar{t}_1 \ldots \bar{t}_n$, es además evidente que $\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n$ también se hace cero, por lo tanto

$$E = \bar{\phi} \qquad E' = \Sigma t_r \, (\phi),$$

$$w = \frac{\Sigma t_r(\phi)}{\Sigma t_r(\phi) - \bar{\phi}} \cdot$$

Para aquellos constituyentes en los que el factor x se encuentran en ϕ el segundo miembro de la ecuación anterior se convierte en 1; para aquellos en los que el factor x se encuentra en $\bar{\phi}$ se convierte en 0. Por lo tanto, *los coeficientes de constituyentes simétricos que no abarcan* $\bar{t}_1 \ldots \bar{t}_n$, *de los que el factor* x *se halla en* ϕ *serán 1; de los que el factor* x *no se halla en* ϕ *serán 0.*

Considérese, por último, aquellos constituyentes que no son simétricos con referencia a los dos grupos de símbolos y que al mismo tiempo no involucran a $\bar{t}_1 \ldots \bar{t}_n$.

En este caso, es evidente que ni E ni E' pueden hacerse cero, por lo cual, el numerador del valor fraccional de w en (8) debe sobrepasar al numerador. Ese valor no puede estar representado, por lo tanto, por 1, 0 ó $\frac{0}{0}$. En el desarrollo lógico, debe estar representado entonces por $\frac{1}{0}$. Tal será entonces el coeficiente de esta clase de constituyentes.

15. Por consiguiente, la ecuación lógica final por la que w se expresa como una función lógica desarrollada de $x_1, \ldots x_n, \; t_1, \ldots t_n$, tendrá la forma

$$w = \Sigma_1 \, (XT) + 0 \, \{\Sigma_2 (XT) + \bar{t}_1 \ldots \bar{t}_n\} + \frac{1}{0} + \text{suma de otros constituyentes} \quad (9)$$

en donde Σ_1 (XT) representa la suma de todos los constituyentes simétricos de los que el factor x se encuentra en ϕ, y Σ_2 (XT), la suma de todos los constituyentes simétricos de los que el factor x no se encuentra en ϕ, el constituyente $\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n \; \bar{t}_1 \ldots \bar{t}_n$, caso de aparecer es en ambos casos rechazado.

Pasando de la Lógica al Algebra, puede verse que aquí y en todos los ejemplos similares, la función V, con la ayuda de la cual el sistema algebraico de ecuaciones

para la determinación de los valores de $x_1 \ldots x_n$, $t_1, \ldots t_n$ se forma, es independiente de la naturaleza de cualquier función ϕ implicada, no en la expresión de los datos, sino en la del *quaesitum* del problema propuesto. Así tenemos en el ejemplo presente

$$\text{Prob. } w = \frac{\Sigma_1 (XT)}{V},$$

en donde

$$\begin{aligned} V &= \Sigma_1 (XT) + \Sigma_2 (XT) + t_1 \ldots \overline{t}_n \\ &= \Sigma (XT) + \overline{t}_1 \ldots t_n. \end{aligned} \tag{10}$$

Aquí Σ (XT) representa la suma de todos los constituyentes simétricos de los símbolos x y t, excepto el constituyente $\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_n$, $\overline{t}_1 \ldots \overline{t}_n$. Este valor de V es el mismo que el empleado virtualmente en la solución del problema anterior y por lo tanto debemos aprovecharnos de los resultados allí obtenidos.

Si entonces suponemos, como en la solución a la que me he referido,

$$v = \frac{\phi + \Sigma t_r \{\Sigma (x_r \overline{t}_r + t_r \overline{x}_r) + \overline{x}_1 \ldots \overline{x}_n\}}{2\phi - 1},$$

obtendremos un resultado que puede escribirse así:

$$\text{Prob. } w = \frac{M_1}{M + N - 1}, \tag{11}$$

siendo formado M_1 rechazando de la función ϕ el constituyente $x_1 \ldots \overline{x}_n$, si se encuentra allí, dividiendo el resultado por el mismo constituyente $\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_n$, y cambiando después $\frac{x_1}{\overline{x}_1}$ por m_1, $\frac{x_2}{\overline{x}_2}$ por m_2, etc. Los valores de M y N son los mismos que en el problema anterior. Volviendo a estos y a los valores correspondientes de m_1, m_2, etc., hallamos

$$\text{Prob. } w = M_1 (\mu + \nu - 1),$$

siendo los valores generales de m_r, n_r

$$m_r = \frac{c_r p_r}{\mu - c_r p_r}, \qquad n_r = \frac{c_r (1 - p_r)}{\mu - c_r (1 - p_r)},$$

dándose μ y ν por la solución del sistema de ecuaciones

$$\mu + \nu - 1 = \frac{(\mu - c_1 p_1) \ldots (\mu - c_n p_n)}{\mu^{n-1}} = \frac{\{\nu - c_1 (1 - p_1)\} \ldots \{\nu - c_n (1 - p_n)\}}{\nu^{n-1}}.$$

El valor anterior de la Prob w será el numerador de la fracción (2). Ahora resta determinar su denominador. Para este fin supongamos

$$\phi(x_1, x_2 \ldots x_n) = v,$$

ó

$$\phi = v;$$

por consiguiente

$$\phi\bar{v} + v\bar{\phi} = 0.$$

Sustituyendo el primer miembro de esta ecuación en (7) en lugar de la forma correspondiente $\phi z\bar{w} + w(1 - \phi z)$ obtenemos como ecuación lógica primaria

$$\Sigma\{x_r z\,\bar{t}_r + t_r(1 - x_r z)\} + \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n z + \phi\bar{\jmath} + v\bar{\phi} = 0,$$

de donde eliminando z y reduciendo por la Prop. II, Capítulo IX,

$$\phi\bar{v} + v\bar{\phi} + \Sigma t_r\{\Sigma(x_r\,\bar{t}_r + t_r\,\bar{x}_r) + \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n\} = 0.$$

de donde

$$v = \frac{\phi + \Sigma t_r\{\Sigma(x_r\bar{t}_r + t_r\bar{x}_r) + \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n\}}{2\phi - 1},$$

y desarrollandc como antes

$$v = \Sigma_1(XT) + \bar{t}_1 \ldots \bar{t}_n\,\Sigma_1(X) + 0\{\Sigma_2(XT) + \bar{t}_1 \ldots \bar{t}_n\,\Sigma_2(X)\} + \frac{1}{0}\text{ (Suma de otros constituyentes).} \qquad (12)$$

Aquí Σ_1 (X) indica la suma de todos los constituyentes hallados en ϕ , Σ_2 (X) la suma de todos los constituyentes no encontrados en ϕ . Las expresiones son realmente utilizadas en lugar de φ y $1 - \varphi$ para conservar la simetría.

Por consiguiente resulta que $\Sigma_1(X) + \Sigma_2(X) = 1$, y que como antes, $\Sigma_1'(XT) + \Sigma_2(XT) = \Sigma(XT)$. Por lo tanto, V tendrá el mismo valor que antes, y tendremos

$$\text{Prob. } v = \frac{\Sigma_1(XT) + \bar{t}_1 \ldots \bar{t}_n\,\Sigma_1(X)}{V}, \qquad (13)$$

ó transformando como en el caso anterior

$$\text{Prob. } v = \frac{M_1 + N_1}{M + N - 1},$$

en donde N_1 se forma al dividir ϕ por $\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n$, y cambiando el resultado $\frac{x_1}{\bar{x}_1}$ por n_1, $\frac{x_2}{\bar{x}_2}$ por n_2, etc.

Ahora bien, la solución final del problema propuesto se dará asignando sus valores determinados a los términos de la fracción

$$\frac{\text{Prob.}\,\phi(x_1, \ldots x_n)z}{\text{Prob.}\,\phi(x_1, \ldots x_n)}, \text{ or } \frac{\text{Prob.}\,w}{\text{Prob.}\,v}.$$

Por lo tanto, por (11) y (13) tenemos

$$\text{Prob. buscada} = \frac{M_1}{M_1 + N_1}.$$

Un poco de atención en el modo de formación de las funciones M_1 y N_1 mostrará que el proceso puede simplificarse mucho. Podríamos, desde luego, exhibir la solución del problema general en forma de regla, como sigue:

Rechazar de la función $\phi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ *el constituyente* $\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n$ *si está contenido allí, suprimir en todos los constituyentes restantes los factores* $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, *etc. y cambiar generalmente en el resultado* x_r *por* $\dfrac{c_r p_r}{\mu - c_r p_r}$. *Llamar a este resultado* M_1.

Además, sustituir en la función $\phi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ *el constituyente* $\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n$ *si allí se encuentra, por la unidad; suprimir en todos los componentes restantes los factores* $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, *etc., y cambiar generalmente en el resultado* x_r *por*

$$\frac{c_r(1 - p_r)}{\nu - c_r(1 - p_r)}.$$

Entonces la solución buscada será expresada por la fórmula

$$\frac{M_1}{M_1 + N_1}, \tag{14}$$

siendo determinados μ *y* ν *por la solución del sistema de ecuaciones*

$$\mu + \nu - 1 = \frac{(\mu - c_1 p_1) \ldots (\mu - c_n p_n)}{\mu^{n-1}} = \frac{\{\nu - c_1(1 - p_1)\} \ldots \{\nu - c_n(1 - p_n)\}}{\nu^{n-1}}. \tag{15}$$

Puede añadirse que los límites de μ y ν son los mismos que en el problema anterior. Esto podría inferirse del principio general de continuidad; pero las condiciones de limitación, que son probablemente suficientes, pueden establecerse también por medio de otras consideraciones.

Así, a partir de la demostración del método general de las probabilidades, capítulo XVII, Prop. IV, parece que las cantidades $x_1, \ldots x_n, t_1, \ldots t_n$, en el sistema primario de ecuaciones algebraicas, deben ser fracciones positivas. Ahora bien

$$\frac{x_r}{1 - x_r} = n_r = \frac{c_r (1 - p_r)}{\nu - c_r (1 - p_r)}.$$

Por lo tanto, generalmente n_r debe ser una cantidad positiva y, por consiguiente, debemos tener

$$\nu \overline{\overline{>}} c_r (1 - p_r).$$

De la misma manera, puesto que tenemos

$$\frac{x_r t_r}{(1 - x_r)(1 - t_r)} = m_r = \frac{c_r p_r}{\mu - c_r p_r},$$

debemos tener generalmente

$$\mu \overline{\overline{>}} c_r p_r.$$

16. Es probable que las dos clases de condiciones así representadas sean juntas suficientes para determinar generalmente cuáles de las raíces de las ecuaciones que determinan μ y ν han de tomarse. Tomemos en particular el caso en que $n = 2$. Aquí tenemos

$$\mu + \nu - 1 = \frac{(\mu - c_1 p_1)(\mu - c_2 p_2)}{\mu} = \mu - (c_1 p_1 + c_2 p_2) + \frac{c_1 p_1 c_2 p_2}{\mu},$$

$$\therefore \nu = 1 - c_1 p_1 - c_2 p_2 + \frac{c_1 p_1 c_2 p_2}{\mu} = 1 - c_1 p_1 - \frac{(\mu - c_1 p_1) c_2 p_2}{\mu}.$$

De donde, puesto que $\mu \overline{\overline{>}} c_1 p_1$ tenemos generalmente

$$\nu \overline{\overline{<}} 1 - c_1 p_1.$$

De la misma forma tenemos

$$\nu \overline{\overline{<}} 1 - c_2 p_2, \quad \mu \overline{\overline{<}} 1 - c_1 (1 - p_1), \quad \mu \overline{\overline{<}} 1 - c_2 (1 - p_2).$$

Ahora bien, ya se ha mostrado que existirá solo un valor de μ que satisfaga el total de las condiciones anteriores relativas a esa cantidad, a saber

$$\mu \overline{\overline{>}} c_r p_r, \quad \mu \overline{\overline{<}} 1 - c_r (1 - p_r),$$

de donde, la solución a este caso, al menos, está determinada. Y yo estimo que el mismo método puede aplicarse generalmente y es suficiente. Pero esto es una cuestión sobre la que es deseable un poco más de luz.

Para comprobar los resultados anteriores, suponer $\phi\ (x_1, \ldots x_n) = 1$, bien, el desarrollo de 1 da todos los constituyentes posibles de los símbolos $x_1, \ldots x_n$. Prosiguiendo entonces de acuerdo con la Regla, encontramos

$$M_1 = \frac{\mu^n}{(\mu - c_1 p_1) \ldots (\mu - c_n p_n)} - 1 = \frac{\mu}{\mu + \nu - 1} - 1 \text{ por (15)}$$

$$N_1 = \frac{\nu^n}{\{\nu - c_1 (1 - p_1)\} \ldots \{\nu - c_n (1 - p_n)\}} - 1 = \frac{\nu}{\mu + \nu - 1} - 1.$$

Sustituyendo en (14) hallamos

$$\text{Prob.}\, z = 1 - \nu,$$

que concuerda con la solución anterior.

De nuevo, sea $\phi\ (x_1, \ldots\ x_n) = x_1$, que, después del desarrollo y supresión de los factores $\bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n$, da $x_1 (x_2 + 1) \ldots (x_n + 1)$, de donde hallamos

$$M_1 = \frac{c_1 p_1 \mu^{n-1}}{(\mu - c_1 p_1) \ldots (\mu - c_n p_n)} = \frac{c_1 p_1}{\mu + \nu - 1} \quad \text{por (15)}$$

$$N_1 = \frac{c_1 (1 - p_1) \nu^{n-1}}{\{\nu - c_1 (1 - p_1)\} \ldots \{\nu - c_n (1 - p_n)\}} = \frac{c_1 (1 - p_1)}{\mu + \nu - 1}.$$

Sustituyendo, tenemos

Probabilidad de que si el suceso A_1 ocurre, E ocurrirá $= p_1$. Y este resultado se comprueba por medio de los datos. Pueden añadirse comprobaciones similares fácilmente.

Examinemos el caso en que

$$\phi\ (x_1, \ldots x_n) = x_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n + x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_3 \ldots \bar{x}_n \ldots + x_n \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_{n-1}.$$

Aquí encontramos

$$M_1 = \frac{c_1 p_1}{\mu - c_1 p_1} \ldots + \frac{c_n p_n}{\mu - c_n p_n},$$

$$N_1 = \frac{c_1 (1 - p_1)}{\nu - c_1 (1 - p_1)} \ldots + \frac{c_n (1 - p_n)}{\nu - c_n (1 - p_n)};$$

De donde tenemos el siguiente resultado

Probabilidad de que si solo una de las causas $A_1, A_2 \ldots A_n$ se presenta se seguirá el suceso E.

$$= \frac{\Sigma \frac{c_r p_r}{\mu - c_r p_r}}{\Sigma \frac{c_r p_r}{\mu - c_r p_r} + \Sigma \frac{c_r (1 - p_r)}{\nu - c_r (1 - p_r)}}$$

Obsérvese que este caso es bastante diferente del ya muy bien conocido en el que la característica de mutuamente excluyentes de las causas $A_1, \ldots A_n$ es uno de los elementos de los datos, expresando una condición bajo la que se hicieron las observaciones por las que se supone que han sido determinadas las probabilidades de A_1, A_2, etc.

Considérese, por último, el caso en que $\phi(x_1, \ldots x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n$.

Aquí

$$M_1 = \frac{c_1 p_1 \ldots c_n p_n}{(\mu - c_1 p_1) \ldots (\mu - c_n p_n)} = \frac{c_1 p_1 \ldots c_n p_n}{\mu^{n-1}(\mu + \nu - 1)},$$

$$N_1 = \frac{c_1 (1 - p_1) \ldots c_n (1 - p_n)}{\{\nu - c_1 (1 - p_1)\} \ldots \{\nu - c_n (1 - p_n)\}} = \frac{c_1 (1 - p_1) \ldots c_n (1 - p_n)}{\nu^{n-1}(\mu + \nu - 1)}.$$

De donde el siguiente resultado:

Probabilidad de que si todas las causas A, ... A_n se dan, se seguirá el suceso E

$$= \frac{p_1 \ldots p_n \nu^{n-1}}{p_1 \ldots p_n \nu^{n-1} + (1 - p_1) \ldots (1 - p_n) \mu^{n-1}}.$$

Esta expresión presupone, tal como debe, el valor 1 cuando cualquiera de las cantidades $p_1, \ldots p_n$ es igual a 1.

17. PROBLEMA VIII.— Siendo tan restringidas ciertas causas A_1, $A_2 \ldots A_n$ que no pueden todas no ocurrir, pero sólo pueden suceder en determinadas combinaciones indicadas por la ecuación

$$\phi(A_1, A_2 \ldots A_n) = 1,$$

y habiéndose dado las probabilidades separadas $c_1, \ldots c_n$ de dichas causas, y las correspondientes probabilidades $p_1, \ldots p_n$ de que un suceso E ocurrirá si esas causas respectivas se realizan, se busca la probabilidad del suceso E.

Este problema se diferencia del último que hemos visto en varios puntos, pero principalmente en éste: que la restricción indicada por la ecuación $\phi(A_1, \ldots A_n) = 1$, forma uno de los datos y se supone que es proporcionada o está de acuerdo con la misma experiencia de la que se deriva el conocimiento de los elementos numéricos del problema.

Representando los sucesos $A_1, \ldots A_n$ por $x_1, \ldots x_n$ respectivamente y el suceso E por z, tenemos

$$\text{Prob.}\, x_r = c_r, \quad \text{Prob.}\, x_r z = c_r p_r. \tag{1}$$

Supongamos, generalmente

$$x_r z = t_r,$$

entonces, combinando el sistema de ecuaciones así indicado con las ecuaciones

$$\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n = 0, \quad \phi(x_1, \ldots x_n) = 1, \quad \text{o} \quad \phi = 1,$$

proporcionadas por los datos, encontramos finalmente como expresión desarrollada de z

$$z = \Sigma(XT) + 0\bar{t}_1\, \bar{t}_2 \ldots \bar{t}_n\, \Sigma(X), \tag{2}$$

donde x representa en sucesión cada constituyente hallado en ϕ, y T una serie parecida de constituyentes de los símbolos $t_1, \ldots t_n$, incluyendo Σ (XT) sólo constituyentes *simétricos* con referencia a los dos grupos de símbolos.

El método de reducción que ha de utilizarse en este caso es tan parecido al que hemos ejemplificado en anteriores problemas, que simplemente mostraré los resultados a que nos lleva. Hallamos

$$\text{Prob.}\, z = \frac{M}{M+N}, \tag{3}$$

con las relaciones

$$\frac{M_1}{c_1 p_1} \ldots = \frac{M_n}{c_n p_n} = \frac{N_1}{c_1(1-p_1)} = \frac{N_n}{c_n(1-p_n)} = M + N. \tag{4}$$

En donde M se forma al suprimir en $\phi(x_1, \ldots x_n)$ todos los factores $\bar{x}_1, \ldots \bar{x}_n$, y cambiando en el resultado x_1 por m_1, x_n por m_n, mientras que N se forma al sustituir en M, n_1 por m_1, etc.; además M_1 está formado de aquella parte de M de la que m_1 es un factor, N_1 de esa parte de N de la que n_1 es un factor; etc.

Vamos a tomar, como ejemplo, el caso particular en el que las causas $A_1 \ldots A_n$ son mutuamente excluyentes. Aquí tenemos

$$\phi(x_1, \ldots x_n) = x_1\, \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n + \ldots + x_n\, \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_{n-1}.$$

de donde

$$M = m_1 + m_2 \ldots + m_n,$$
$$N = n_1 + n_2 \ldots + n_n,$$
$$M_1 = m_1, \quad N_1 = n_1, \text{ \&c.}$$

sustituyendo, tenemos

$$\frac{m_1}{c_1 p_1} \ldots = \frac{m_n}{c_n p_n} = \frac{n_1}{c_1 (1 - p_1)} \ldots = \frac{n_n}{c_n (1 - p_n)} = M + N.$$

de donde hallamos

$$\frac{m_1 + m_2 \ldots + m_n}{c_1 p_1 + c_2 p_2 \ldots + c_n p_n} = M + N,$$

ó

$$\frac{M}{c_1 p_1 \ldots + c_n p_n} = M + N.$$

Así, por (3)

$$\text{Prob. } z = c_1 p_1 \ldots + c_n p_n,$$

un resultado conocido.

Hay otros casos particulares en los que el sistema (4) admite una solución fácil. Es obvio de todas maneras que en la mayoría de los casos nos llevaría a resultados de gran complejidad. Tampoco parece probable que la existencia de una relación funcional entre las causas, tal como se supone en los datos del problema general, aparezca amenudo en la experiencia de hecho, si exceptuamos sólo los casos particulares tratados con anterioridad.

Si se hubiese modificado el problema general por la restricción de que el suceso E no puede ocurrir, estando ausentes todas las causas $A_1 \ldots A_n$, en vez de la restricción de que dichas causas no pueden no darse todas, reteniendo la condición que queda indicada por la ecuación $\phi\ (A_1, \ldots A_n) = 1$, deberíamos haber encontrado para la ecuación lógica final

$$z = \Sigma_1 (XT) + 0\, \Sigma (X),$$

siendo Σ (X) como antes, igual a $\phi\ (x_1, \ldots x_n)$, pero Σ_1 (XT) formado al rechazar de ϕ el componente $\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n$ si está allí y entonces multiplicando cada componente –x del resultado por el correspondiente constituyente –t. Es evidente que en el caso particular en que las causas son mutuamente excluyentes el valor de la Prob. z así deducido será el mismo que antes.

18. PROBLEMA IX.– Suponiendo los datos de cualquiera de los problemas anteriores, supóngase que se nos pide determinar la probabilidad de que si el suceso E se presenta lo hará asociado con la causa particular A_r; en otras palabras, determinar la probabilidad de la causa A_r *a posteriori*, cuando se ha observado que el suceso E ocurre.

En este caso debemos buscar el valor de la fracción

$$\frac{\text{Prob. } x_r z}{\text{Prob. } z}, \quad \text{o} \quad \frac{c_r p_r}{\text{Prob. } z}, \tag{1}$$

por los datos.

Como en los problemas anteriores, el valor de la Prob. Z ha sido indicado sobre diferentes hipótesis relativas a la conexión o falta de conexión de las causas, es evidente que en todos estos casos este problema es susceptible de una determinada solución, simplemente sustituyendo en (1) el valor de ese elemento así determinado.

Si las probabilidades *a priori* de las causas son iguales, tenemos $c_1 = c_2 \ldots = c_r$. Por lo tanto, para las diferentes causas, el valor (1) variará directamente como la cantidad P_r. Por lo tanto, *cualquiera que sea la naturaleza de la conexión entre las causas*, la probabilidad *a posteriori* de cada causa será proporcional a la probabilidad del suceso observado E cuando se sabe que esa causa existe. El caso particular de este teorema, que se presenta cuando las causas son mutuamente excluyentes, es bien conocido. Tenemos, pues

$$\frac{\text{Prob. } x_r z}{\text{Prob. } z} = \frac{c_r p_r}{\Sigma c_r p_r} = \frac{p_r}{p_1 + p_2 \ldots + p_n},$$

siendo iguales los valores de $c_1, \ldots c_n$.

Aunque para la demostración de estos y similares teoremas en el caso particular en el que las causas son mutuamente excluyentes, no es necesario introducir el símbolo funcional ϕ, lo que equivale a reclamar para nosotros la elección de todas las posibles y concebibles hipótesis de la conexión de las causas, sin embargo, bajo cada forma, la solución de problemas por este método de trabajo, en el que el número de datos es indefinidamente grande, debe siempre tener algún carácter complejo. Yo no intento investigar si la evolución sistemática que presenta, de la lógica primero y segundo de las relaciones numéricas de un problema, proporciona una compensación por la extensión y el aburrimiento ocasional de sus procesos. Su principal valor consiste sin duda, en su poder, en el dominio que nos da sobre las cuestiones que aparentemente desconcertarían la fuerza de la razón humana inasistida. Por esta razón, no se ha considerado superfluo el mostrar en este capítulo su aplicación a problemas, algunos de los cuales posiblemente pueden ser considerados como repulsivos, por su dificultad, sin ser recomendados por ninguna indicación de immediata utilidad. De momento, considero imposible para nosotros formar un juicio definido del valor ulterior de tales especulaciones.

19. El problema siguiente es de descripción mucho mas fácil que los anteriores.

PROBLEMA X.— *La probabilidad del acaecimiento de un cierto fenómeno natural bajo circunstancias dadas es p. La observación también ha registado una probabilidad a de la existencia de una causa permanente de ese fenómeno, es decir,*

de una causa que siempre producirá el suceso bajo las supuestas circunstancias. ¿Cuál es la probabilidad de que si se observa que el fenómeno ocurre n veces en sucesión bajo las circunstancias dadas, ocurrirá la n + 1 vez? ¿Cuál es también la probabilidad, después de tal observación, de la existencia de una causa permanente a la que nos hemos referido?

PRIMER CASO.– Representemos por t la existencia de una causa permanente, y $x_1, x_2 \ldots x_{n+1}$ los acaecimientos sucesivos del fenómeno natural.

Si existe la causa permanente, los sucesos $x_1, x_2 \ldots x_{n+1}$ son consecuencias necesarias. Por lo tanto

$$t = vx_1, \quad t = vx_2, \text{ \&c.},$$

y eliminando los símbolos indefinidos

$$t(1 - x_1) = 0, \quad t(1 - x_2) = 0, \quad t(1 - x_{n+1}) = 0.$$

Ahora tenemos que buscar la probabilidad de que si la combinación $x_1 x_2 \ldots x_n$ sucede, el suceso x_{n+1} sucederá, es decir, tenemos que buscar el valor de la fracción

$$\frac{\text{Prob. } x_1 x_2 \ldots x_{n+1}}{\text{Prob. } x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

Primero buscaremos el valor de la Prob. $x_1 x_2 \ldots x_n$. Representando la combinación $x_1 x_2 \ldots x_n$ por w, tenemos las siguientes ecuaciones lógicas:

$$t(1 - x_1) = 0, \quad t(1 - x_2) = 0 \ldots t(1 - x_n) = 0,$$
$$x_1 x_2 \ldots x_n = w.$$

Reduciendo la última a la forma

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)(1 - w) + w(1 - x_1 x_2 \ldots x_n) = 0,$$

y sumándola a las primeras, tenemos

$$\Sigma t(1 - x_i) + x_1 x_2 \ldots x_n (1 - w) + w(1 - x_1 x_2 \ldots x_n) = 0, \qquad (1)$$

en donde Σ se extiende a todos los valores de i de 1 a n, para la ecuación lógica de los datos. Con ésta debemos conectar las condiciones numéricas

$$\text{Prob. } x_1 = \text{Prob. } x_2 \ldots = \text{Prob. } x_n = p, \quad \text{Prob. } t = a;$$

y nuestro objetivo es encontrar la Prob. w.

A partir de (1) tenemos

$$w = \frac{\Sigma t(1 - x_i) + x_1 x_2 \ldots x_n}{2 x_1 x_2 \ldots x_n - 1}$$

$$= \frac{\Sigma (1 - x_i) + x_1 x_2 \ldots x_n}{2 x_1 x_2 \ldots x_n - 1} t + \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{2 x_1 x_2 \ldots x_n - 1} (1 - t), \qquad (2)$$

al desarrollar con respecto a t. Este resultado debe ser desarrollado más adelante con respecto a $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Ahora, si hacemos $x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \ldots \quad x_n = 1,$ los coeficientes de t y de $1 - t$ se convierten en 1. Si damos a los mismos símbolos cualquier otro grupo de valores formados por el intercambio de 0 y 1, es evidente que el coeficiente de t será negativo, mientras que el de $1 - t$ será 0. Por lo tanto, el total desarrollo (2) será

$$w = x_1 x_2 \ldots x_n t + x_1 x_2 \ldots x_n (1 - t) + 0\,(1 - x_1 x_2 \ldots x_n)\,(1 - t)$$

+ constituyentes cuyos coeficientes sean $\frac{1}{0}$, o equivalente a $\frac{1}{0}$.

Aquí tenemos

$$V = x_1 x_2 \ldots x_n t + x_1 x_2 \ldots x_n (1 - t) + (1 - x_1 x_2 \ldots x_n)\,(1 - t)$$

$$= x_1 x_2 \ldots x_n t + 1 - t\,;$$

De donde, pasando de la Lógica al Algebra,

$$\frac{x_1 x_2 \ldots x_n t + x_1(1 - t)}{p} = \frac{x_1 x_2 \ldots x_n t + x_2 (1 - t)}{p} \cdots$$

$$= \frac{x_1 x_2 \ldots x_n t + x_n (1 - t)}{p} = \frac{x_1 x_2 \ldots x_n t}{a} = x_1 x_2 \ldots x_n t + 1 - t.$$

$$\text{Prob. } w = \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{x_1 x_2 \ldots x_n t + 1 - t}.$$

A partir de las formas de la ecuación anterior es evidente que tenemos $x_1 = x_2 \ldots = x_n$. Sustituir entonces cada una de estas cantidades por x y el sistema es

$$\frac{x^n t + (1 - t) x}{p} = \frac{x^n t}{a} = x^n t + 1 - t,$$

$$\text{Prob. } w = \frac{x^n}{x^n t + 1 - t};$$

del cual fácilmente deducimos

$$\text{Prob. } w = \text{Prob. } x_1 x_2 \ldots x_n = a + (p - a)\left(\frac{p - a}{1 - a}\right)^{n-1}$$

Si en este resultado cambiamos n por n + 1, tenemos

$$\text{Prob. } x_1 x_2 \ldots x_{n+1} = a + (p - a)\left(\frac{p - a}{1 - a}\right)^{n}.$$

Por lo tanto hallamos

$$\frac{\text{Prob. } x_1 x_2 \ldots x_{n+1}}{\text{Prob. } x_1 x_2 \ldots x_n} = \frac{a + (p - a)\left(\frac{p - a}{1 - a}\right)^{n}}{a + (p - a)\left(\frac{p - a}{1 - a}\right)^{n-1}} \qquad (3)$$

como la expresión de la probabilidad de que si el fenómeno se repite n veces, se presentará la n + 1 vez. Por el método del capítulo XIX se ve que a no puede sobrepasar a p en valor.

Las siguientes comprobaciones son obvias:

Primero.– Si $a = 0$, la expresión se reduce a p, tal como debería. Pues cuando es cierto que no existe una causa permanente, los acaecimientos sucesivos del fenómeno son independientes.

Segundo.– Si $p = 1$, la expresión se convierte en 1, tal como debería.

Tercero.– Si $p = a$, la expresión es 1, a no ser que $a = 0$.

Si la probabilidad de un fenómeno es igual a la probabilidad de que hay una causa que bajo circunstancias dadas siempre lo produciría, entonces el hecho de que ese fenómeno ha sido observado siempre bajo esas circunstancias, da como cierta su reaparición bajo las mismas (25).

Cuarto.– Según aumenta n, la expresión se acerca en valor a la unidad. Esto indica que la probabilidad de la repetición del suceso aumenta con la frecuencia de sus apariciones sucesivas, – un resultado que está de acuerdo con las leyes naturales de la expectativa.

SEGUNDO CASO.– Vamos a buscar la probabilidad *a posteriori* de la existencia de una causa permanente del fenómeno. Esto exige que averiguemos el valor de la fracción

$$\frac{\text{Prob.}\, tx_1 x_2 \ldots x_n}{\text{Prob.}\, x_1 x_2 \ldots x_n},$$

cuyo denominador ya ha sido determinado.

Para determinar el numerador, suponer

$$tx_1 x_2 \ldots x_n = w,$$

y entonces, procediendo como antes, obtenemos para el desarrollo lógico

$$w = tx_1 x_2 \ldots x_n + 0\,(1 - t).$$

De donde, pasando de la Lógica al Algebra, tenemos de inmediato

$$\text{Prob.}\, w = a,$$

un resultado que podía haber sido anticipado. Sustituyendo entonces en el numerador y el denominador de la fracción anterior sus valores, tenemos para la probabilidad *a posteriori* de una causa permamente, la expresión

$$\frac{a}{a + (p - a)\left(\frac{p - a}{1 - a}\right)^{n-1}}$$

Es obvio que el valor de esta expresión aumenta con el valor de n.

Estoy en deuda con un docto corresponsal (26), cuyas originales contribuciones a la teoría de las probabilidades ya han sido mencionadas, para la siguiente comprobación del primero de los resultados anteriores (3).

"Siendo p la total probabilidad *a priori* del suceso (bajo las circunstancias), y la probabilidad de alguna causa C que necesariamente la produciría, a, sea x la probabilidad de que ocurrirá si no existe tal causa C. Entonces tenemos la ecuación

$$p = a + (1 - a)\, x,$$

De donde

$$x = \frac{p - a}{1 - a}.$$

Ahora bien, el fenómeno observado es el acaecimiento del suceso n veces. La probabilidad *a priori* de éste sería

1 suponiendo que C exista

x^n suponiendo que C no exista

por lo tanto, la probabilidad *a posteriori* de que C existe es

$$\frac{a}{a + (1 - a)x^n},$$

y de que C no existe es

$$\frac{(1 - a)\, x^n}{a + (1 - a)\, x^n}.$$

Consecuentemente, la probabilidad de otro acaecimiento es

$$\frac{a}{a + (1 - a)\, x^n} \times 1 + \frac{(1 - a)\, x^n}{a + (1 - a)\, x^n} \times a,$$

ó

$$\frac{a + (1 - a)\, x^{n+1}}{a + (1 - a)\, x^n},$$

la cual, al reemplazar n por su valor $\dfrac{p - a}{1 - a}$, se encontrará que está de acuerdo con (3)."

Comprobaciones similares pueden, es probable, también hallarse para los siguientes resultados, obtenidos por medio de la aplicación directa del método general.

La probabilidad, bajo las mismas circunstancias de que si de n ocasiones, el suceso ocurre r veces, y no ocurre $n - r$ veces, ocurrirá en la vez n + 1 es

$$\frac{a + m\,(p - a)\left(\dfrac{p - la}{1 - a}\right)^r}{a + m\,(p - la)\left(\dfrac{p - la}{1 - a}\right)^{r-1}}$$

en donde

$$m = \frac{n\,(n-1)\,..\,n-r+1}{1\,.\,2\,..\,r} \quad \text{y} \quad l = \frac{r}{n}.$$

La probabilidad de una causa permanente (siendo r menor que n) es 0. Esto es fácilmente comprobable.

Si p es la probabilidad de un suceso, y c la probabilidad de que si ocurre será debido a una causa permanente; la probabilidad de que después de n acaecimientos sucesivos volverá a ocurrir a la n + 1 ocasión similar es

$$\frac{c + (1 - c)\,x^n}{c + (1 - c)\,x^{n-1}},$$

en donde

$$x = \frac{p\,(1 - c)}{1 - cp}.$$

20. Es notable que las soluciones de los problemas anteriores estén desprovistas de cualquier elemento arbitrario. Difícilmente habríamos podido anticipar tal circunstancia, a partir del aspecto de los datos. De todas formas, ha de observarse que en todos esos problemas se supone que se conocen *a priori* las probabilidades de las *causas* implicadas. En ausencia de este elemento de conocimiento presupuesto, parece probable que constantes arbitrarias aparecerían *necesariamente* en la solución final. Alguna confirmación a esta observación es proporcionada por un tipo de problemas a los que se ha dedicado bastante atención y que, en conclusión, consideraré brevemente.

Se ha observado que en el cielo hay un gran número de estrellas dobles muy cercanas. O estos aparentes ejemplos de conexión tienen algún fundamento físico o no lo tienen. Si no lo tienen, podemos considerar el fenómeno de una doble estrella como el resultado accidental de una " distribución al azar" de estrellas sobre la bóveda celeste, es decir, de una distribución que haría tan probable que cualquier miembro del sistema binario apareciera tanto en un punto como en otro. Si se asume esta hipótesis y si el número de estrellas de un brillo requerido es conocido, podemos determinar cuál es la probabilidad de que dos de ellas se hallasen dentro de tales límites de distancia mutua como para formar el fenómeno observado. Así, Mitchell (27), considerando que hay 230 estrellas en los cielos iguales en brillo a β Capricorni, determina que es 80 contra 1 la probabilidad de tal combinación se pre-

sentase si tales estrellas se distribuyesen al azar. Se busca, pues la probabilidad de que exista entre sus miembros un fundamento de conexión física cuando se ha observado tal combinación.

Además, la suma de las inclinaciones de las órbitas de los diez planetas conocidos respecto al plano de la eclíptica en el año 1.801 fue 91º 4187, de acuerdo con las medidas francesas. Si fueran todas las inclinaciones igualmente probables, Laplace (28) determina que solamente habría la posibilidad extremadamente pequeña,.00000011235 de que la media de las inclinaciones se hallen dentro del límite así indicado. Yconcluye, por lo tanto, que hay una gran probabilidad a favor de una causa inductora por la que las inclinaciones de las órbitas planetarias han sido limitadas dentro de unos límites tan estrechos. El Profesor De Morgan (29) tomando la suma de las inclinaciones a 92°, da a la anterior probabilidad el valor .00000012, e infiere que "es 1: .00000012, el que hubo una causa necesaria en la formación del sistema solar para que las inclinaciones sean lo que son". Se ha obtenido una conclusión igualmente determinada a partir de las coincidencias observadas entre la dirección de polarización circular en el cristal de roca y la de ciertas caras oblícuas en su estructura cristalina (30).

Estos problemas tienen todos un carácter similar. Se formula cierta hipótesis sobre las diferentes consecuencias posibles por las que podemos indicar las probabilidades con verdadero rigor. Hallando algún resultado real de observación entre esas consecuencias y siendo conocida, por lo tanto, su probabilidad *hipotética,* se busca por consiguiente determinar la probabilidad de la hipótesis supuesta, o su contraria. En el problema de Mitchell, la hipótesis es la de una " distribución azarosa de las estrellas", –la posible y observada consecuencia, la aparición de una doble estrella próxima. La pequeñísima probabilidad de tal resultado implica que la probabilidad de la hipótesis es igualmente pequeña, o al menos, del mismo orden de pequeñez. Y por lo tanto, como algunos piensan, se infiere la alta y determinada probabilidad de una causa inductora de las disposiciones estelares. Observaciones similares se aplican a otros ejemplos aducidos.

21. El problema general, en cualquiera que sea la forma que se presente, admite sólo una solución *indeterminada.* Representemos por x la hipótesis propuesta, y por y un fenómeno que puede ocurrir como una de sus posibles consecuencias y cuya probabilidad calculada, en la suposición de la verdad de la hipótesis, es p, y pidasenos el determinar la probabilidad de que se si oberva el fenómeno y, la hipóteis x es verdadera. Los datos de este problema no pueden ser expresados sin la introducción de un elemento arbitrario. Sólo podemos escribir.

$$\text{Prob. } x = a, \qquad \text{Prob. } xy = ap; \tag{1}$$

siendo a perfectamente arbitrario, excepto que debe de caer entre los límites 0 y 1 inclusive. Si P representa, pues la probabilidad condicional buscada, tenemos

$$P = \frac{\text{Prob. } xy}{\text{Prob. } y} = \frac{ap}{\text{Prob. } y}. \tag{2}$$

Nos queda entonces determinar la Prob. y.

Sea $xy = t$, entonces

$$y = \frac{t}{x} = tx + \frac{1}{0}\, t(1-x) + 0\,(1-t)\,x + \frac{0}{0}\,(1-t)\,(1-x). \qquad (3)$$

De donde, observando que la Prob. $x = a$, Prob. $t = ap$, y pasando de la Lógica al Algebra, tenemos

$$\text{Prob. } y = \frac{tx + c\,(1-t)\,x}{tx + 1 - t},$$

con las relaciones

$$\frac{tx + (1-t)\,x}{a} = \frac{tx}{ap} = tx + 1 - t.$$

De donde fácilmente hallamos

$$\text{Prob. } y = ap + c\,(1-a). \qquad (4)$$

Ahora, recurriendo a (3), hallamos que c es la probabilidad de que si el suceso $(1 - t)\,(1 - x)$ ocurre, el suceso y ocurrirá, Pero

$$(1-t)\,(1-x) = (1-xy)\,(1-x) = 1 - x.$$

De donde c es la probabilidad de que si el suceso x no ocurre, el suceso y ocurrirá.

Sustituyendo el valor de la Prob. y en (2), tenemos el siguiente teorema:

Siendo p la probabilidad calculada de cualquier fenómeno y, sobre una supuesta hipótesis física x, la probabilidad a posteriori P de la hipótesis física, cuando se ha observado el fenómeno, se expresa por la ecuación

$$P = \frac{ap}{ap + c(1-a)}, \qquad (5)$$

donde a y c son constantes arbitrarias, representando la primera la probabilidad a priori de la hipótesis y la última la probabilidad de que si la hipótesis fuera falsa, el suceso y se presentaría.

La principal conclusión que se puede deducir del teorema anterior es que, si lo demás no se altera, el valor de P aumenta y disminuye simultáneamente con el de p. Por lo tanto, cuanto mayor o menor sea la probabilidad del fenómeno cuando se *supone* la *hipótesis*, tanto mayor o menor es la probabilidad de la hipótesis cuando se ha *observado el fenómeno*. Cuando p es muy pequeño, entonces generalmente P es también pequeño, a no ser que o a sea grande o c sea pequeño.

Por lo tanto, en segundo lugar, si la probabilidad del fenómeno es muy pequeña cuando se presupone la hipótesis, la probabilidad de la hipótesis es muy pequeña

cuando se observa el fenómeno, a no ser que o la probabilidad *a priori* de la hipótesis sea grande, o la probabilidad del fenómeno sobre cualquier otra hipótesis pequeña.

La fórmula (5) admite una comprobación exacta en varios casos, como cuando $c = 0$, ó $a = 1$, ó $a = 0$. Pero es evidente que no da un valor definido de P, a no ser que haya medios para determinar los valores de a y c. Cualesquiera soluciones que profesen cumplir este objetivo, o son erróneas en principio o implican una suposición tácita respecto de los elementos arbitrarios anteriores. La solución del Sr. de Morgan al problema de Laplace concerniente a la existencia de una causa determinante de los límites estrechos dentro de los que se encierran las inclinaciones de las órbitas planetarias respecto al plano de la eclíptica, me parece que es del último tipo. Habiendo hallado una probabilidad p = 00000012 de que la suma de las inclinaciones sería menos de 92°, siendo todos los grados de inclinación igualmente probables en cada órbita, este competente autor observa: "Si hubiera una razón para que las inclinaciones fuesen como han sido descritas, la probabilidad del suceso es 1. Consecuentemente, es 1: 00000012 (i. e. 1: p) el que hubo una causa necesaria en la formación del sistema solar que hizo que las inclinaciones fuesen lo que son".

Ahora bien, este resultado es lo que realmente daría la ecuación (5) si dando a p el valor anterior tomáramos $c = 1$, $a = \frac{1}{2}$. Pues deberíamos así hallar

$$P = \frac{\frac{1}{2}p}{\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}} = \frac{p}{1+p} \qquad \therefore\ 1 - P : P :: 1 : p. \tag{6}$$

Pero si P representa la probabilidad, *a posteriori*, de que todas las inclinaciones son igualmente probables, 1 − P es la probabilidad, *a posteriori*, de que ese no es el caso, o tomando la alternativa del Sr. de Morgan, de que existe una causa determinante. La ecuación (6) por lo tanto, está de acuerdo con el resultado del Sr. de Morgan.

22. ¿Estamos justificados, sin embargo, al asignar a a y c valores particulares? Yo estoy muy inclinado a pensar que no. La cuestión tiene menos importancia en el ejemplo especial que en sus relaciones ulteriores. En las aplicaciones aceptadas en la teoría de las probabilidades, no aparecen explícitamente constantes arbitrarias; pero en el anterior y en otros muchos casos sancionados por las más altas autoridades, se ha intentado alguna determinación virtual de ellos. Y esta circunstancia ha dado a los resultados de la teoría, especialmente con referencia a cuestiones de

causalidad, un carácter de precisión determinada que, mientras por otra parte parece que ha engrandecido el dominio y extendido el campo de los números, incluso más allá de la medida de su antigua pretensión de dirigir el mundo (31), por otra parte ha provocado fuertes protestas contra su intrusión en campos en donde la conjetura es la única base de inferencia. El mismo hecho de la aparición de constantes arbitrarias en las soluciones de problemas como el anterior, tratado con el método de este trabajo, parece implicar que una solución determinada es imposible y marcar el punto donde la investigación debería detenerse. Poseemos ciertamente los medios para interpretar esas constantes, pero la experiencia así proporcionada está tan lejos de nuestro alcance como la experiencia que imposibilitaría la necesidad de un intento cualquiera de solución.

Otra dificultad que acompaña a estas cuestiones, e inherente quizá a la misma constitución de nuestras facultades, es la de definir con precisión lo que se entiende por Orden. No tenemos ninguna dificultad en detectar las manifestaciones de ese principio, excepto en casos muy complejos, ni dudamos en imputarle una base casi necesaria en causas que operan bajo la Ley. Pero asignarle un patrón *numérico* sería un vano, por no decir un presuntuoso, empeño. Aún así debe de intentarse, antes de que podamos aspirar a pesar con exactitud las probabilidades de diferentes constituciones del universo, para determinar los elementos sobre los que sólo una solución determinada de los problemas en cuestión pueda ser establecida.

23. La forma más corriente de esforzarse en soslayar la *necesaria* arbitrariedad de la solución de problemas en la teoría de las probabilidades que se basa en datos insuficientes, es asignar a algún elemento cuya probabilidad real es desconocida, todos los grados posibles de probabilidad; suponer que estos grados de probabilidad son ellos mismos igualmente probables; y, considerándolos como tantas causas diferentes del fenómeno observado, aplicar los teoremas que representan el caso de un efecto debido a alguna de entre un número de causas igualmente probables pero mutuamente excluyentes (Problema 9). Por ejemplo, habiendo sido observada m veces sucesivas la salida del sol después de un cierto intervalo de oscuridad, se determina la probabilidad de que otra vez salga bajo las mismas circunstancias, según principios aceptados de la siguiente forma. Sea p cualquier probabilidad desconocida entre 0 y 1, y c (infinitésimal y constante) la probabilidad de que la probabilidad de la salida del sol después de un intervalo de oscuridad esté entre los límites p y $p + dp$.

Entonces la probabilidad de que el sol saldrá m veces consecutivas es

$$c\int_0^1 p^m dp;$$

y la probabilidad de que hará esto y saldrá otra vez o, lo que es lo mismo, que saldrá m + 1 veces sucesivamente, es

$$c\int_0^1 p^{m+1} dp,$$

Por lo tanto, la probabilidad de que si sale m veces en sucesión, saldrá la m + 1 vez es

$$\frac{c\int_0^1 p^{m+1}\,dp}{c\int_0^1 p^m\,dp} = \frac{m+1}{m+2},$$

la solución conocida y generalmente aceptada.

La solución anterior se fundamenta normalmente sobre la supuesta analogía del problema con la de el sacar bolas de una urna que tiene una mezcla de bolas blancas y negras, entre los que todas las proporciones numéricas posibles se supone que son igualmente probables. Y hay que destacar que hay dos o tres hipótesis diferentes que llevan al mismo resultado final. Por ejemplo, si las bolas son finitas en número y aquellas que se sacan no son repuestas, o si son infinitas en número, tanto si las sacadas son repuestas como si no, entonces, suponiendo que m extracciones sucesivas han dado sólo bolas blancas, la probabilidad de la consecución de una bola blanca a la m + 1 extracción es (32)

$$\frac{m+1}{m+2}.$$

Se ha dicho que el principio implicado en la anterior y en similares aplicaciones es el de la distribución igual de nuestro conocimiento o mejor de nuestra ignorancia —, la asignación a diferentes estados de cosas de las que no sabemos nada, y por la misma razón de que no sabemos nada de grados iguales de probabilidad. Entiendo, sin embargo, que éste es un método arbitrario de actuación. Pueden ocurrir casos, y uno así se ha aducido, en que hipótesis diferentes llevan a la misma conclusión final. Pero esos casos son excepcionales. Con referencia al problema particular en cuestión, se muestra en el informe citado, que hay una hipótesis, a saber, cuando las bolas son finitas en número y no reemplazadas, que lleva a una conclusión diferente y es fácil ver que hay otras hipótesis, que involucran tan estrictamente el principio de la "distribución igual de conocimiento o ignorancia", que también nos conduciría a resultados conflictivos.

24. Representemos, por ejemplo, el caso de la salida del sol por la extracción de una bola blanca de una bolsa que contiene un número de bolas infinito, que son todas blancas o negras, y sea el principio supuesto que *todas las constituciones posibles del sistema de bolas son igualmente probables.* Por constitución del sistema, entiendo una disposición que asigna a cada bola en el sistema un color determinado, o blanco o negro. Busquemos, por lo tanto, la probabilidad de que si se sacan m bolas blancas en m extracciones, se sacará una blanca en la m + 1 extracción.

Supongamos primero que el número de bolas es μ y hagamos que los símbolos $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ se asignen de la siguiente forma: x_i denota aquel suceso que consiste en que la bola número i del sistema sea blanca, siendo $x_i = 1$ la proposición declara-

toria de tal estado de cosas. De forma pareja, el símbolo compuesto $1 - v_i$ representará la circunstancia de que la bola número i sea negra. Es evidente que los diferentes componentes formados del grupo de símbolos $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ representarán de la misma manera las diferentes constituciones posibles del sistema de bolas con respecto a negrura y blancura y siendo 2^μ el número de tales constituciones, la probabilidad de cada una será $\frac{1}{2^\mu}$ de acuerdo con la hipótesis. Este es el valor que deberíamos encontrar si sustituyésemos en la expresión de cada constituyente por cada uno de los símbolos de $x_1, x_2, \ldots x_\mu$, el valor de $1/2$. Así pues, la probabilidad de cualquier suceso que puede expresarse como una serie de constituyentes de la descripción anterior, será hallado sustituyendo en tal expresión el valor 1/2 para casa uno de los símbolos anteriores.

Ahora bien, cuanto mayor sea μ, menos probable es el que cualquier bola que ha sido sacada y repuesta vuelva de nuevo a sacarse. Cuando μ se aproxima al infinito, esta probabilidad se acerca a 0. Y siendo este el caso, el estado de las bolas realmente sacadas puede expresarse como una función lógica de m de los símbolos $x_1, \ldots x_2 \ldots x_\mu$, y, por lo tanto, por desarrollo, como una serie de constituyentes de los símbolos dichos m. Por consiguiente, su probabilidad se hallará sustituyendo para cada uno de los símbolos, tanto en la forma desarrollada como en la no desarrollada, el valor $1/2$. Pero esta es la misma sustitución que sería necesaria, y que sería suficiente hacer, si la probabilidad de una bola blanca en cada extracción fuera conocida *a priori* como $1/2$.

Resulta, por lo tanto, que si el número de bolas es infinito y todas las constituciones del sistema igualmente probables, la probabilidad de sacar m bolas blancas sucesivamente será $1/2^m$, y la probabilidad de sacar m + 1 bolas blancas sucesivamente es de $1/2^{m+1}$; de donde la probabilidad de que después de que se hayan extraido m bolas blancas, la siguiente extracción proporcionará una blanca, será $1/2$. En otras palabras la experiencia pasada no afecta en este caso a la futura expectativa.

25. Puede resultar satisfactorio el comprobar este resultado por métodos ordinarios. Para lograr esto, buscaremos primero: la probabilidad de extraer r bolas blancas, y $p - r$ bolas negras, en p intentos, de una bolsa que contenga μ bolas siendo reemplazada cada bola después de ser sacada, y siendo todas las constituciones de los sistemas igualmente probables *a priori*. Segundo: el valor que esta probabilidad adquiere cuando μ se hace infinito. Tercero: la probabilidad derivada de aquí de que si se sacan m bolas blancas sucesivamente, la bola m + 1 extraida será también blanca.

La probabilidad de que serán sacadas r bolas blancas y p–r negras en p tentativas de una urna que contiene μ bolas, siendo repuesta cada bola después de cada tentativa, y siendo igualmente probable todas las constituciones del sistema como hemos definido antes, es igual a la suma de las probabilidades del mismo resultado, a partir de las hipótesis separadas de que no hay bolas blancas, hay una bola blanca, –y por último, hay μ bolas blancas en la urna. Por lo tanto, es la suma de las

probabilidades de este resultado sobre la hipótesis de que hay m bolas blancas, variando n desde 0 a μ. Suponiendo ahora que hay n bolas blancas, la probabilidad de extraer una bola blanca en una sola extracción es n/μ, y la probabilidad de sacar r bolas blancas y p−r negras en un orden determinado en p extracciones es

$$\left(\frac{n}{\mu}\right)^r\left(1-\frac{n}{\mu}\right)^{p-r}$$

Pero habiendo tantos órdenes como combinaciones de r cosas en p, la probabilidad total de extraer r bolas blancas en p extracciones del sistema de μ bolas de las que n son blancas, es

$$\frac{p\,(p-1)\,..\,(p-r+1)}{1\,.\,2\,..\,r}\left(\frac{n}{\mu}\right)^r\left(1-\frac{n}{\mu}\right)^{p-r} \qquad (1)$$

De nuevo, el número de constituciones del sistema de μ bolas, que admiten exactamente que n bolas sean blancas, es

$$\frac{\mu\,(\mu-1)\,..\,(\mu-n+1)}{1\,.\,2\,..\,n},$$

y el número de posibles constituciones del sistema es 2^{μ}. Por lo tanto, la probabilidad de que exactamente n bolas sean blancas es

$$\frac{\mu\,(\mu-1)\,..\,(\mu-n+1)}{1\,.\,2\,..\,n\,2^{\mu}}.$$

Multiplicando (1) por esta expresión, y tomando la suma de los productos desde $n=0$ a $n=\mu$, tenemos

$$\frac{p\,(p-1)\,..\,p-r+1}{1\,.\,2\,..\,r}\,\Sigma_{n=0}^{n=\mu}\frac{\mu\,(\mu-1)\,..\,\mu-n+1}{1\,.\,2\,..\,n\,2^{\mu}}\left(\frac{n}{\mu}\right)^r\left(1-\frac{n}{\mu}\right)^{p-r}, \qquad (2)$$

Como expresión de la probabilidad total de que de un sistema de μ bolas en el que todas las constituciones son igualmente probables, saldrán r bolas blancas en p extracciones. Entonces

$$\Sigma_{n=0}^{n=\mu}\frac{\mu\,(\mu-1)\,..\,(\mu-n+1)}{1\,.\,2\,..\,n\,.\,2^{\mu}}\left(\frac{n}{\mu}\right)^r\left(1-\frac{n}{\mu}\right)^{p-r}$$

$$=\Sigma_{n=0}^{n=\mu}\frac{\mu\,(\mu-1)\,..\,(\mu-n+1)}{1\,.\,2\,..\,n\,2^{\mu}}\left(\frac{n}{\mu}\right)^r\left(1-\frac{n}{\mu}\right)^{p-r}\epsilon^{n\theta}\;..\;(\theta=0)$$

$$=\frac{1}{2^{\mu}}\left(\frac{D}{\mu}\right)^r\left(1-\frac{D}{\mu}\right)^{p-r}\Sigma_{n=0}^{n=\mu}\frac{\mu\,(\mu-1)\,..\,(\mu-n+1)}{1\,.\,2\,..\,n}\,\epsilon^{n\theta}$$

$$=\frac{1}{2^{\mu}}\left(\frac{D}{\mu}\right)^r\left(1-\frac{D}{\mu}\right)^{p-r}(1+\epsilon^{\theta})^{\mu}, \qquad (3)$$

Representando D el símbolo $\frac{d}{d\theta}$, de tal manera que

$$\phi(D)\,\varepsilon_{n\theta} = \phi(n)\,\varepsilon^{n\theta}.$$

Pero por un teorema conocido

$$^{*}t^{m} = 1 + \Delta 0^{m} t + \frac{\Delta^{2} 0^{m}}{1.2} t(t-1) + \frac{\Delta^{3} 0^{m}}{1.2.3} t(t-1)(t-2).$$

$$^{*}\therefore\ D^{m}(1+\varepsilon^{\theta})^{\mu} = \{1 + \Delta 0^{m} D + \frac{\Delta^{2} 0^{m}}{1.2} D(D-1) + \&c.\}\,(1+\varepsilon^{\theta})^{\mu}.$$

Sea en el segundo miembro

$$\varepsilon^{\theta} = x,$$

entonces

$$^{*}D^{m}(1+\varepsilon^{\theta})^{\mu} = (1 + \Delta 0^{m} x \frac{d}{dx} + \frac{\Delta^{2} 0^{m}}{1.2} x^{2} \frac{d^{2}}{dx^{2}} + \&c.)\,(1+x)^{\mu},$$

ya que

$$D(D-1)\,..\,(D-i+1) = x^{i}\left(\frac{d}{dx}\right)^{i}.$$

En el segundo miembro de la ecuación anterior, llevando a cabo las diferenciaciones y haciendo $x = 1$ (puesto que $\theta = 0$), obtenemos

$$D^{m}(1+\varepsilon^{\theta})^{\mu} = \mu\,(\Delta 0^{m})\,2^{\mu-1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}(\Delta^{2} 0^{m})\,2^{\mu-2} + \&c.$$

El último término del segundo miembro de esta ecuación será

$$\frac{\mu(\mu-1)\,..\,(\mu-m+1)\,\Delta^{m} 0^{m}}{1.2\,..\,m}\,2^{\mu-m} = \mu(\mu-1)\,..\,(\mu-m+1)\,2^{\mu-m};$$

* ERRATA.– Leer en las fórmulas con asterisco 0^{μ} por 1

puesto que $\Delta^m 0^m = 1 \,.\, 2 \,..\, m$. Cuando μ es una cantidad grande este término sobrepasa a todos los otros en valor y a medida que μ se aproxima al infinito tiende a convertirse en infinitamente grande en comparación con ellos, y como, por otra parte, asume la forma

$$\mu^m \, 2^{\mu - m},$$

tenemos, al pasar al límite

$$D^m \, (1 + \varepsilon^\theta)^\mu = \mu^m \, 2^{\mu - m} = \left(\frac{\mu}{2}\right)^m 2^\mu.$$

Así, si ϕ (D) representa cualquier función del símbolo D, capaz de ser desarrollada en una serie de potencias ascendentes de D, tenemos

$$\phi \, (D) \, (1 + \varepsilon^\theta)^\mu = \phi \left(\frac{\mu}{2}\right) 2^\mu,$$

Si $\theta = 0$ y $\mu = \infty$. Hablando estrictamente, esto implica que la proporción de los dos miembros de la ecuación anterior se aproxima a un estado de igualdad a medida que μ crece hacia el infinito, siendo θ igual a 0.

Por medio de este teorema, el último miembro de (3) se reduce a la forma

$$\frac{1}{2^\mu}\left(\frac{1}{2}\right)^r \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{p-r} 2^\mu = \left(\frac{1}{2}\right)^p.$$

Por lo tanto (2) da

$$\frac{p\,(p-1)\,..\,(p-r+1}{1 \,.\, 2 \,..\, r} \left(\frac{1}{2}\right)^p,$$

como la expresión de la probabilidad de que de una urna que contenga un número infinito de bolas blancas y negras, siendo todas las constituciones del sistema igualmente probables, saldrán r bolas blancas en p extracciones.

Por lo tanto, haciendo p = m, y $r = m$, la probabilidad de que en m extracciones todas las bolas sean blancas es de $\left(\frac{1}{2}\right)^m$,

y la probabilidad de que éste será el caso y de que, además la extracción m + 1 proporcionará una bola blanca es de $\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$,

de donde la probabilidad de que si las primeras m extracciones dan sólo bolas blancas, la estracción m + 1 dará también una bola blanca es

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \div \left(\frac{1}{2}\right)^m = \frac{1}{2};$$

y generalmente, cualquier resultado propuesto tendrá la misma probabilidad como si fuera una probabilidad constante el que cada extracción particular diese una bola blanca o una negra. Esto concuerda con la conclusión obtenida antes.

26. Estos resultados sólo ilustran el hecho de que cuando se suple la imperfección de los datos por hipótesis, las soluciones, en general, varían según la naturaleza de las hipótesis presupuestas; de tal forma sigue planteada la cuestión de si los principios de la teoría de las probabilidades nos sirven para guiarnos en la elección de tales hipótesis. Ya he expresado mi convicción de que no es así una convicción reforzada por otras razones además de las expuestas anteriormente. Así, habiendo encontrado una solución determinada de un problema por el método de esta obra, puede a veces conseguirse también una solución igualmente definida por el mismo método cuando uno de los datos, supongamos Prob. $x = p_1$, se omite. Pero no he sido capaz de descubrir ninguna forma de deducir la segunda solución de la primera por *integración,* con respecto a p supuestamente variable dentro de los límites determinados en el Capítulo XIX. De todas formas, considero que esta deducción podría ser posible si el principio a que hemos aludido en el Artículo 23 fuera válido. Aún así expreso con timidez mi disidencia en estos puntos respecto a los matemáticos en general y más especialmente respecto a uno que, de entre los autores ingleses, ha penetrado más profundamente en el espíritu y métodos de Laplace; y me aventuro a esperar, que una cuestión no inferior a ninguna otra en importancia es la teoría de las Probabilidades, recibirá la detallada atención que se merece.

REFERENCIAS

(23) La manera por la que datos como los de arriba pueden obtenerse a partir de la experiencia es fácilmente imaginable. Enfrente de la ventana de la habitación en la que escribo hay un campo, expuesto a ser inundado por dos causas diferentes, pero que pueden ser combinadas, a saber, riadas de los manantiales superiores del Río Lee y mareas del océano. Supongamos que observaciones hechas en N ocasiones distintas han proporcionado los siguientes resultados: en A ocasiones el río ha crecido por ríadas, y en P de esas ocasiones ha sido inundado por esta causa o no. En B ocasiones el río ha crecido por la marea y de esas ocasiones Q veces fue inundado, o por esta causa o no. Suponiendo, entonces, que el campo no puede ser inundado en ausencia de las dos causas antes mencionadas, pidásenos determinar la probabilidad total de su inundación.

Aquí los elementos a, b, p, q del problema general representa las proporciones

$$\frac{A}{N'}\ \frac{P}{A'}\ \frac{B}{N'}\ \frac{Q}{B'}$$

O mejor los valores a los que se aproximan esas proporciones, según se incremente indefinidamente el valor de N.

(24) Puede ser adecuado el resaltar que el problema anterior fue propuesto a los matemáticos por el autor en la Cambridge and Dublin Mathematical Journal, Nov. 1.851, acompañado de las observaciones adjuntas:

"Los motivos que me han llevado a adoptar, después de mucha consideración, con referencia a esta cuestión, un curso poco frecuente hoy en día y que no ha de restablecerse por razones ligeras, son las siguientes: Primero, propongo la cuestión como un test sobre la suficiencia de métodos recibidos. Segundo, anticipo que su discusión de alguna forma añadirá a nuestro conocimiento de una rama importante del análisis puro. Sin embargo, deseo basar mi defensa sólo sobre el primero de estos motivos".

"Mientras, espero que pueda encontrarse algunas personas que, sin desviarse de la línea de sus estudios anteriores, consideren esta cuestión como merecedora de su atención, niego totalmente que sea ofrecido como una prueba de habilidad personal o conocimiento, sino que deseo que pueda ser considerada solamente con referencia a esos fines científicos y públicos por cuyo sólo motivo se propone".

El autor piensa que debe añadir que la publicación del problema anterior condujo a una interesante correspondencia privada, pero no obtuvo una solución.

(25) Como no podemos volver ni revivir la infancia, somos incapaces de decir hasta dónde sirven resultados como los anteriores para explicar la confianza con que los niños pequeños conectan sucesos cuya asociación han percibido una vez. Pero podemos conjeturar, en general, que la fuerza de sus expectativas se debe a la necesidad de deducir (como una parte de su naturaleza racional), y la estrecha pero impresionante experiencia sobre la que se ejercita la facultad. De aquí la referencia de cada clase de secuencia a la de causa y efecto. Un pequeño amigo del autor, al ser metido en la cama, preguntó a su hermano la pertinente pregunta: "¿Por qué el ir a dormir por la noche hace que haya luz por la mañana?" El hermano, que tenía un año más, fue capaz de contestar, que habría luz por la mañana incluso si los niños pequeños no se fueran a dormir por la noche.

(26) Profesor Donkin

(27) Phil. Transactions, an 1.767.

(28) Theorie Analitique des Probabilités, p. 276

(29) Encyclopedia Metropolitana. Art. Probabilities.

(30) Edimburgh Review. N. 185, pág. 32. Este artículo, aunque tiene algún error, merece la pena que se le preste atención.

(31) Mundum Regunt Numeri.

(32) Ver una memoria del obispo Terrot, Edimburgh, Phil. Trans. Vol. XX, part. IV.

CAPITULO XXI

APLICACION PARTICULAR DEL METODO GENERAL ANTERIOR A LA CUESTION DE LA PROBABILIDAD DE JUICIOS

1. Desde el supuesto de que el método general de este Tratado para la solución de cuestiones en la Teoría de las Probabilidades ha sido suficientemente aclarado en los capítulos anteriores, se propone aquí penetrar en una de sus aplicaciones prácticas, seleccionada a partir del amplio campo de estadísticas sociales, a saber, la estimación de la probabilidad de los juicios. Quizá esta aplicación, si es sopesada por sus resultados inmediatos, no sea la mejor que podía haberse escogido. Una de las primeras conclusiones a la que nos lleva es la de la *necesaria* insuficiencia de cualesquiera datos que sólo la experiencia nos puede proporcionar para el cumplimiento del objetivo más importante de la investigación. Pero al poner claramente delante de nosotros la necesidad de hipótesis como algo suplementario a los datos de la experiencia, y al capacitarnos para deducir con rigor las consecuencias de *cualquier* hipótesis que pueda adoptarse, el método logra todo lo que se halla en rigor dentro de su ámbito. Y puede resaltarse, que en cuestiones que hacen relación a la conducta de nuestra propia especie, las hipótesis son más justificables en cuestiones como a las que hemos aludido en las últimas secciones del capítulo anterior. Nuestra experiencia general de la naturaleza humana viene en ayuda de la escasez e imperfección de los informes estadísticos.

2. Los elementos implicados en problemas relacionados con una sesión de un tribunal que juzga una causa criminal son los siguientes:

PRIMERO.– La probabilidad de que un determinado miembro del Jurado forme una opinión correcta del caso.

SEGUNDO.– La probabilidad de que la parte acusada sea culpable.

TERCERO.– La probabilidad de que sea condenado, o de que sea absuelto.

CUARTO.– La probabilidad de que su condena o absolución sea justa.

QUINTO.– La constitución del Jurado.

SEXTO.– Los datos proporcionados por la experiencia tales como los números relativos de casos en los que se ha llegado a decisiones unánimes, o en los que se han

obtenido mayorías determinadas; el número de casos en los que las decisiones han sido revocadas por juzgados superiores, etc., además, el tipo de cuestiones consideradas pueden serlo como directas o inversas. Las cuestiones directas de probabilidad son aquellas en las que la probabilidad de la decisión correcta para cada miembro del tribunal, o de culpabilidad para la parte acusada, se supone que se conocen *a priori*, y en los que se busca la probabilidad de una decisión de un tipo determinado, o con una mayoría definida. Problemas inversos son aquellos en los que a partir de los datos suministrados por la experiencia, se pide determinar algún elemento que, aunque se halle respecto de estos en la relación de causa a efecto, no puede hacerse directamente objeto de observación; como cuando a partir de los registros de las decisiones de tribunales se pide determinar la probabilidad de que un miembro del tribunal juzgará correctamente. Se prestará una mayor atención a este tipo de problemas, los más difíciles y los más importantes de toda la serie.

3. No hay dificultad a la hora de resolver los problemas directos aludidos en la enumeración anterior. Supóngase que no hay más que un miembro del Jurado. Sea k la probabilidad de que la persona acusada sea culpable; x la probabilidad de que el miembro del Jurado formará una opinión correcta; X la probabilidad de que el acusado será condenado. Entonces:

kx = probabilidad de que la parte acusada sea culpable y de que el miembro del el jurado le declare culpable.

(1 − k) (1 − x) = probabilidad de que la persona acusada sea inocente, y de que el jurado le declara culpable.

Ahora bien, siendo estos los únicos casos en los que se puede dar un veredicto de condena, y siendo además mutuamente excluyentes, tenemos

$$X = kx + (1 - k)\,(1 - x). \tag{1}$$

De forma pareja, si hubiera n miembros del jurado cuyas probabilidades separadas de juicios correctos fueran $x_1, x_2 \ldots x_n$, la probabilidad de un veredicto de culpabilidad unánime será

$$X = kx_1\, x_2 \ldots x_n + (1 - k)\,(1 - x_1)\,(1 - x_2) \ldots (1 - x_n).$$

De donde, si las diferentes probabilidades $x_1, x_2 \ldots x_n$ son iguales, y se representan cada una por x tenemos

$$X = kx^n + (1 - k)\,(1 - x)^n. \tag{2}$$

La probabilidad en el último caso de que el acusado sea culpable, será

$$\frac{kx^n}{kx^n + (1 - k)\,(1 - x)^n}$$

Todos estos resultados presuponen que los sucesos cuyas probabilidades se indican por k, x_1, x_2, etc., son independientes, suposición que, de cualquier modo,

en la medida que nos concierne a nosotros, está implícita en el hecho de que esos sucesos son los únicos de los que se dan las probabilidades.

La probabilidad de condena por un número dado de votos puede hallarse a partir de los mismos principios. Si un jurado está compuesto por tres personas, cuyas probabilidades de decisión correctas son x, x´, x´´, la probabilidad X_2 de que el acusado sea declarado culpable por dos de ellos será

$$X_2 = k\{xx'(1-x'') + xx''(1-x') + x'x''(1-x)\}$$
$$+ (1-k)\{(1-x)(1-x')x'' + (1-x)(1-x'')x' + (1-x')(1-x'')x\},$$

la cual, si $x = x' = x''$ se reduce a

$$3kx^2(1-x) + 3(1-k)x(1-x)^2.$$

Y por el mismo método de razonamiento, se hará patente que si X_i representa la probabilidad de que la persona acusada sea declarada culpable por i votos de un jurado compuesto por n personas, cuyas probabilidades separadas de juicio correcto son iguales y representadas por x, entonces

$$X_i = \frac{n(n-1)..(n-i+1)}{1.2..i}\{kx^i(1-x)^{n-i} + (1-k)x^{n-i}(1-x)^i\}. \qquad (3)$$

Si se pide la probabilidad de la condena por una mayoría determinada a, tenemos simplemente

$$i - a = n - i,$$

de donde

$$i = \frac{n+a}{2},$$

que debe ser sustituido en la fórmula anterior. Por supuesto, a sólo admite aquellos valores que hacen de i un entero. Si n es par, esos valores son 0, 2, 4, etc.; si es impar, 1, 3, 5 etc.; lo cual es obvio.

La probabilidad de una condena por una mayoría de, al menos, un número dado de votos m se hallará sumando las siguientes varias probabilidades determinadas como antes, a saber:

PRIMERO.– La probabilidad de condena por una mayoría exacta m.

SEGUNDO.– La probabilidad de condena por la siguiente mayoría más grande $m + 2$; y así sucesivamente; siendo el último elemento de la serie la probabilidad de una condena unánime. Así, la probabilidad de culpabilidad por una mayoría de, al menos, cuatro de entre doce jurados, sería

$$X_8 + X_9 \ldots + X_{12},$$

siendo dados los valores de los términos anteriores por (3) después de haber allí $n = 12$.

4. Cuando, en vez de un jurado, consideramos el caso de una mera asamblea deliberadora compuesta por n personas, cuyas probabilidades separadas de juicio correcto se denotan por x, las fórmulas anteriores son reemplazadas por otras, simplificadas de alguna manera al omitir la cantidad k.

La probabilidad de una decisión unánime es

$$X = x^n + (1 - x)^n.$$

La probabilidad de un acuerdo con i votos de entre el número total es

$$X_i = \frac{n(n-1)\,..\,(n-i+1)}{1\,.\,2\,..\,i}\{x^i(1-x)^{n-i} + x^{n-i}(1-x)^i\}. \qquad (4)$$

No es necesario dar más detalles de este tipo de investigaciones. Han sido tratadas con considerable extensión por Condorcet, Laplace y Poisson y otros autores, que han investigado en particular las formas de cálculo y reducción que son necesarias cuando n e i son números grandes.

Es patente que toda la investigación posee un carácter altamente especulativo. Los valores de x y k no pueden determinarse por observación directa. Sólo podemos suponer que, en general, ambos deben sobrepasar el valor $1/2$; que el primero x debe aumentar con el progreso de la inteligencia general; mientras que el último, k, debe depender en gran medida de aquellos pasos preliminares en la administración de la Ley por lo que las personas que son sospechosas de algún delito son llevadas ante un tribunal en su país. Poisson ha destacado que en períodos de revolución, como por ejemplo durante el reinado del Terror en Francia, el valor de k puede caer, si se tuvieran en cuenta los agravios políticos, bastante por debajo del límite $1/2$.

La historia de Europa en días más cercanos a los nuestros probablemente confirmaría esta observación, y mostraría que no sólo a partir de la licencia salvaje de la democracia ha de comprenderse la acusación de la inocencia.

Laplace supone que todos los valores de x desde $x = \frac{1}{2}$, a $x = 1$ son igualmente probables. Así., excluye la suposición de que sea más probable que un miembro del jurado sea engañado que no, pero supone que dentro de los límites en que se encierran las probabilidades de exactitud de juicio individual, no hay ninguna razón para dar preferencia a un valor de x sobre otro. Esta hipótesis es totalmente arbitraria, y sería inútil penetrar aquí en sus consecuencias.

Poisson parece haber sido el primero en esforzarse en deducir los valores de x y k, inferencialmente, a partir de la experiencia. En los seis años desde 1.825 a 1.830 inclusive, el número de individuos acusados de delitos contra personas ante los tribunales de Francia fue de 11.016, y el número de personas condenadas fue de 5.286. Los jurados estaban compuestos cada uno por 12 personas, y la decisión fue tomada por una mayoría simple. Considerando las cifras anteriores lo suficientemente grandes para el cálculo de probabilidades, habría por lo tanto una probabili-

dad medida por la fracción $\frac{5286}{11016}$, ó .4782 de que una persona acusada sería condenada por una mayoría simple. Deberíamos tener la ecuación

$$X_7 + X_8 \ldots + X_{12} = .4782, \tag{5}$$

siendo dada la expresión general para X_i por (3), después de hallar allí n = 12. En el año 1.831, habiendo sido modificada la Ley, requería una mayoría de al menos cuatro personas para condenar, y el número de personas juzgadas por delitos contra personas durante aquel año fue de 2.046, y el número de condenados fue de 743, la probabilidad de condena de un individuo por la mayoría de arriba fue $\frac{743}{2046}$, ó .3631. Por lo tanto, deberíamos tener

$$X_8 + X_9 \ldots + X_{12} = .3631. \tag{6}$$

Suponiendo que los valores de k y x fueran los mismos para el año 1.831, como para los 6 años anteriores, las dos ecuaciones (5) y (6) nos capacitan para determinar aproximadamente sus valores. Así, Poisson halló

$$k = .5354, \quad x = .6786.$$

Por delitos contra la propiedad durante los mismos periodos, halló por medio de un análisis similar

$$k = .6744, \quad x = .7771.$$

la solución del sistema (5) y (6) conduce en cada caso a dos valores de k y a dos valores de x, siendo en cada par un valor mayor, y el otro menor que 1/2. Se supuso que en cada caso se preferiría el valor más grande, considerándose más probable que la parte acusada fuera culpable que inocente, y más probable el que un miembro del jurado formara una opinión correcta que el que la formara errónea a partir de las pruebas.

5. Los datos empleados por Poisson, especialmente aquellos que fueron suministrados por el año 1.831, son evidentemente demasiado imperfectos como para permitirnos el tener la suficiente confianza en las determinaciones anteriores de x y k ; y se introducen aquí, principalmente por razón del método. Hubiera sido posible registrar durante los seis años, 1.825 – 30, ó durante un periodo similar, el número de condenas sentenciadas con cada mayoría posible de votos. Podría haberse averiguado con exactitud los valores de los elementos $X_8, X_9 \ldots X_{12}$, caso de no haber razones para prohibirlo. Aquí surge entonces el concepto del problema general, del que el de Poisson es un caso particular. ¿Cómo determinaremos los valores de x y k, a partir de este sistema de datos patentemente supernumerosos? Si la hipótesis adoptada por Poisson y los otros autores sobre el tema, sobre que la absoluta independencia de los sucesos cuyas probabilidades vienen indicadas por x y k ha de conservarse, deberíamos de ser llevados a formar un sistema de cinco ecuaciones del tipo (3) y o seleccionar de entre éstas ese par de ecuaciones que nos parezcan más convenientes, o combinar juntas las ecuaciones del sistema por el

método de cuadrados más pequeños. Podría dudarse si el último método sería estrictamente aplicable en tales casos, especialmente si los valores de x y k proporcionados por diferentes pares seleccionados de entre las ecuaciones dadas fueran muy distintos entre sí. El Sr. Cournot ha considerado un problema de algún modo similar en el que, a partir de los registros de votos individuales en un tribunal compuesto por cuatro jueces, se propone investigar las probabilidades separadas de un veredicto correcto de cada juez.

Para la determinación de los elementos x, x', x'', x''', obtiene ocho ecuaciones, que divide en dos grupos de cuatro ecuaciones y recalca que si hubiera una discrepancia considerable, entre los valores de x, x', x'', x''', determinada a partir de esos grupos, podría considerarse como una indicación de que la hipótesis de la independencia de opiniones de los jueces era insostenible, en el caso particular. El principio de esta forma de investigación ha sido referido en (XVIII.4).

6. Procedo a aplicar al tipo de problemas arriba indicado el método de este tratado e investigaré primero si los registros de juzgados y asambleas deliberativas pueden, por sí solos, proporcionar cualquier información respecto a las probabilidades de juicio correcto para sus miembros individuales y, resultando que no pueden, en segundo lugar, que clase y cantidad de hipótesis necesarias concordaría mejor con los datos efectivos.

PROPOSICION I

A partir de los meros registros de las deciciones de un juzgado o una asamblea deliberativa, no es posible deducir ninguna conclusión definida respecto a la exactitud de los juicios individuales de sus miembros.

Aunque esta Proposición pueda parecer que sólo expresa la convicción del sentido común por sí solo, no carecerá de interés mostrar que admite una demostración rigurosa.

Supongamos el caso de una asamblea deliberadora compuesta por n miembros, sin hacer ningún tipo de hipótesis sobre la dependencia o independencia de sus juicios. Empleemos los símbolos lógicos $x_1, x_2, \ldots x_n$ de acuerdo con la siguiente definición, a saber: hagamos que el símbolo genérico x_i, indique aquel suceso consistente en la expresión de una opinión correcta por parte del miembro número i, A_i del juzgado. Consideraremos los valores de la Prob. x_1, Prob. x_2, ... Prob. x_n, como los *quaesita* de un problema y a continuación debemos investigar la expresión de sus posibles datos.

Ahora bien, esos datos son las probabilidades de sucesos susceptibles de expresarse por funciones lógicas determinadas de los símbolos $x_1, x_2, \ldots x_n$. Representen $X_1, X_2, \ldots X_m$ las funciones en cuestión y sea el sistema real de datos

$$\text{Prob. } X_1 = a_1, \qquad \text{Prob. } X_2 = a_2 \qquad \text{Prob. } X_m = a_m.$$

Entonces, a partir de la misma naturaleza del caso puede mostrarse que $X_1, X_2, \ldots X_m$, son funciones que permanecen inalteradas si $x_1, x_2, \ldots x_n$ se cambian por $1 - x_1, 1 - x_2, \ldots 1 - x_n$ respectivamente. Así, si fuera registrado que en cierta proporción de casos los votos dados fueran unánimes, el suceso cuya probabilidad suponiendo que los casos fueran suficientemente numerosos, es a partir de ahí determinada, se expresa por la función lógica

$$x_1 x_2 \ldots x_n + (1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_n),$$

una función que satisface la condición anterior. Además, quede constancia de que en cierta proposición de casos, el voto de un individuo, supongamos A_1, difiere del de los demás miembros del tribunal. El suceso cuya probabilidad es dada así, quedará expresado por la función

$$x_1(1 - x_2) \ldots (1 - x_n) + (1 - x_1) x_2 \ldots x_n;$$

que también satisface las condiciones anteriores. Así, como un acuerdo de opinión puede ser un acuerdo en la verdad o en el error y como, cuando las opiniones se dividen, cualquier parte puede estar en lo cierto o puede equivocarse, está claro que la expresión de cualquier estado particular, ya de acuerdo ya de divergencia de opinión en la asamblea, dependerá de una función lógica de los símbolos $x_1, x_2, \ldots x_n$, que similarmente implica los símbolos privativos $1 - x_1, 1 - x_2, \ldots 1 - x_n$. Pero en los documentos de las asambleas no se intenta aclarar cuál es el grupo de opiniones correctas o equivocadas. Por lo tanto, las funciones $X_1, X_2, \ldots X_m$ deben ser solamente del tipo anteriormente descrito.

7. Ahora bien, al proceder de acuerdo con el método general, para determinar el valor de la Prob. x_1, deberíamos primero igualar las funciones $X_1, \ldots X_m$ a un nuevo conjunto de símbolos $t_1, t_2, \ldots t_m$. De las ecuaciones

$$X_1 = t_1, \; X_2 = t_2, \ldots X_m = t_m,$$

así formadas, deberíamos eliminar los símbolos $x_2, x_3, \ldots x_n$, y determinar a continuación x_1 como una función lógica desarrollada de los símbolos $t_1, t_2, \ldots t_m$, expresiva de sucesos cuyas probabilidades son dadas.

Sea el resultado de la eliminación anterior

$$E x_1 + E'(1 - x_1) = 0; \qquad (1)$$

siendo E y E' función de $t_1, t_2, \ldots t_m$. Entonces

$$x_1 = \frac{E'}{E' - E}. \qquad (2)$$

Ahora bien, las funciones $X_1, X_2, \ldots X_m$ son simétricas con referencia a los símbolos $x_1, \ldots x_n$ y $1 - x_1, \ldots 1 - x_n$. Es evidente, por lo tanto, que en la ecuación E' debe ser idéntico a E. Por lo tanto (2), da

$$x = \frac{E}{0},$$

y es evidente que los únicos coeficientes que pueden aparecer en el desarrollo del segundo miembro de la ecuación anterior son $\frac{0}{0}$ y $\frac{1}{0}$. El primero se presentará siempre que los valores asignados a $t_1, \ldots t_m$ al determinar el coeficiente de un constituyente, sean tales que hagan $E = 0$, el último, o un resultado equivalente, en todos los demás casos. Por lo tanto, podemos representar el desarrollo bajo la forma

$$x_1 = \frac{0}{0} C + \frac{1}{0} D, \qquad (3)$$

siendo C y D constituyentes, o sumas de constituyentes, de los símbolos $t_1, t_2, \ldots t_m$.

Pasando a continuación de la Lógica al Algebra, tenemos

$$\text{Prob. } x_1 = \frac{cC}{C} = c,$$

la función V de la Regla general (XVII. 17) queda reducida en este caso a C. El valor de la Prob. x_1 es, por consiguiente, totalmente arbitrario, si exceptuamos la condición de que no debe sobrepasar los límites 0 y 1. Los valores individuales de la Prob. x_2, ... Prob. x_n, son de igual forma arbitrarios. De aquí no se sigue que estos valores arbitrarios no están conectados entre sí por condiciones necesarias dependientes de los datos. La investigación de tales condiciones, sin embargo, caería adecuadamente entre los métodos del capítulo XIX.

Si, volviendo a la ecuación lógica final, buscamos la interpretación de c, no obtenemos sino un nuevo planteamiento del problema original. Pues dado que C y D juntos incluyen todos los constituyentes posibles de $t_1, t_2, \ldots t_m$ tenemos

$$C + D = 1;$$

y puesto que D es afectado por el coeficiente $\frac{1}{0}$, es evidente que al sustituir allí $t_1, t_2, \ldots t_m$, por sus expresiones en términos de $x_1, x_2, \ldots x_n$, deberíamos tener D = 0. Por lo tanto, la misma sustitución daría $C = 1$. Ahora bien, por la regla, c es la probabilidad de que si el suceso indicado por C tiene lugar, el suceso x_1 tendrá lugar. Por consiguiente, siendo C igual a 1 y, por lo tanto, abarcando todas las contingencias posibles, c debe interpretarse como la probabilidad absoluta del acaecimiento del suceso x_1.

Puede ser interesante determinar en un caso particular la forma real de la ecuación lógica final. Supongamos, pues, que los elementos de los que se derivan los datos son los registros de sucesos diferentes y mutuamente excluyentes. Por ejemplo, sean los datos numéricos $a_1, a_2, \ldots a_m$ las respectivas probabilidades de mayorías diferentes y determinadas. Entonces, siendo mutuamente excluyentes, las funciones lógicas $X_1, X_2, \ldots X_m$ deben satisfacer las condiciones

$$X_1 X_2 = 0, \ \ldots \ X_1 X_m = 0, \quad X_2 X_m = 0, \ \&c.$$

De donde, tenemos

$$t_1 t_2 = 0, \qquad t_1 t_m = 0, \text{ \&c.}$$

Bajo estas circunstancias, puede mostrarse fácilmente que el valor lógico desarrollado de x_1 será

$$x_1 = \frac{0}{0}(\bar{t}_1\bar{t}_2 \ldots \bar{t}_m + t_1\bar{t}_2 \ldots \bar{t}_m \ldots + t_m\bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-1}) + \text{constituyentes cuyos coeficientes sean } \frac{1}{0}.$$

En la ecuación anterior $\bar{t}_1$ representa a $1 - t_1$, etc.

Estas investigaciones pueden aplicarse igualmente al caso en que las probabilidades de los veredictos de un jurado, en la medida en que conciernan al acuerdo o desacuerdo de opinión, formen los datos de un problema. Represente el símbolo lógico w aquel suceso o estado de cosas que consiste en la culpabilidad de la persona acusada. Entonces, las funciones X_1, X_2 . . X_m de este problema son tales que ningún cambio se produciría al convertir simultáneamente w, x_1, x_2 ...x_n en $\bar{w}$, $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, . . $\bar{x}_n$ respectivamente. Por lo cual, el valor lógico final de w, como asímismo los de x_1, x_2, . . x_n aparecerán bajo la misma forma (3) y se deducirá de allí una conclusión general parecida.

Se establece, por consiguiente, que a partir de meros documentos estadísticos no puede deducirse nada con respecto a la correción individual de opinión de un juez o consejero, la culpabilidad de un individuo, o los méritos de una cuestión discutida. Si la determinación de elementos como los de antes puede, en alguna medida, reducirse dentro del ámbito de la ciencia, ello debe de ser en virtud de algún criterio de verdad presupuesto que nos proporcione nuevos datos o de alguna hipótesis relativa a la conexión o la independencia de juicios individuales, que pueda autorizar una nueva forma de investigación. Al examinar los resultados de diferentes hipótesis, será importante la siguiente Proposición general.

PROPOSICION II

8. *Dadas las probabilidades de los n sucesos simples* x_1, x_2, . . x_n, *a saber:*

$$\text{Prob. } x_1 = c_1, \qquad \text{Prob. } x_2 = c_2, \ . \ . \ \text{Prob. } x_n = c_n; \tag{1}$$

y también las probabilidades de los $m - 1$ *sucesos compuestos* X_1, X_2, . . X_{m-1}, *a saber*

$$\text{Prob. } X_1 = a_1, \quad \text{Prob. } X_2 = a_2, \ . \ . \ \text{Prob. } X_{m-1} = a_{m-1}; \tag{2}$$

siendo los últimos sucesos X_1 . . X_{m-1} *distintos y mutuamente excluyentes; se pide la probabilidad de cualquier otro suceso compuesto X.*

En esta proposición se supone que $X_1, X_2, \ldots X_{m-1}$ asi como X, son funciones de sólo los símbolos $x_1, x_2, \ldots x_n$. Además, siendo mutuamente excluyentes los sucesos $X_1, X_2, \ldots X_{m-1}$, tenemos

$$X_1 X_2 = 0, \ \ldots \ X_1 X_{m-1} = 0, \quad X_2 X_3 = 0, \ \&c.; \tag{3}$$

igualándose a cero el producto de cualesquiera dos miembros del sistema.

Ahora hagamos

$$X_1 = t_1, \quad X_{m-1} = t_{m-1}, \quad X = t. \tag{4}$$

Entonces T debe determinarse como una función lógica de $x_1, \ldots x_n, t_1, \ldots t_{m-1}$.

Ahora por (3)

$$t_1 t_2 = 0, \quad t_1 t_{m-1} = 0, \quad t_2 t_3 = 0, \ \&c.; \tag{5}$$

igualándose a cero todos los productos binarios de $t_1, \ldots t_{m-1}$, . La expresión desarrollada para t puede, por lo tanto, incluir en la lista de constituyentes que tienen 1, 0, ó $0/0$ como coeficientes, sólo aquellos que contienen algunos de los siguientes factores, a saber:

$$\bar{t}_1 \bar{t}_2 \ldots \bar{t}_{m-1}, \quad t_1 \bar{t}_2 \ldots \bar{t}_{m-1}, \quad \ldots \ \bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-2} t_{m-1}; \tag{6}$$

representando $\bar{t}_1$ a $1 - t_1$, etc. Resta asignar aquella parte de cada constituyente que incluye los símbolos $x_1 \ldots x_n$; junto con los coeficientes correspondientes.

Dado que $X_i = t_i$ (siendo i cualquier entero entre 1 y m − 1 inclusive) es evidente que

$$X_i \bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-1} = 0,$$

a partir de la misma constitución de las funciones. Cualquier constituyente incluido en el primer miembro de la ecuación anterior tendría, por consiguiente, $\frac{1}{0}$ como coeficiente.

Ahora sea $$X_m = 1 - X_1 \ldots - X_{m-1}; \tag{7}$$

y es evidente que tales constituyentes que tienen a $\bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-1}$, como factor, y sin embargo tienen coeficientes de la forma 1, 0, ó $\frac{0}{0}$, deben ser incluidos en la expresión

$$X_m \bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-1}.$$

Ahora bien X_m puede resolverse en dos partes, a saber, XX_m y $(1 - X)X_m$, siendo la primera la suma de aquellos constituyentes de X_m que se hallan en X, y la última la de aquellos que no se hallan en X. Es evidente que en la expresión desarrollada de t, que es equivalente a X, los coeficientes de los constituyentes en la primera parte XX_m será 1, mientras que los de la última parte $(1 - X) X_m$ será 0. Por lo cual, los elementos que hemos considerado ahora contribuirán al desarrollo de t los términos

$$XX_m \bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-1} + 0\,(1 - X)\, X_m \bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-1}.$$

Además, puesto que $X_1 = t_1$, mientras $X_2\, t_1 = t_2 \quad t_1 = 0$, etc. es evidente que los únicos constituyentes que incluyan $t_1\, \overline{t}_2 \ldots \overline{t}_{m-1}$ como factor que tenga coeficientes de la forma 1, 0 ó $\frac{0}{0}$, serán incluidos en la expresión

$$X_1 t_1 \overline{t}_2 \ldots \overline{t}_{m-1};$$

y razonando como antes, vemos que esto contribuirá al desarrollo de t los términos

$$XX_1\, t_1 \overline{t}_2 \ldots \overline{t}_{m-1} + 0\,(1 - X)\, X_1 t_1 \overline{t}_2 \ldots \overline{t}_{m-1}.$$

Procediendo así con los términos restantes de (6), deducimos para la expresión final de t,

$$t = XX_m \overline{t}_1 \ldots \overline{t}_{m-1} + XX_1 t_1 \overline{t}_2 \ldots \overline{t}_{m-1} \ldots + XX_{m-1} \overline{t}_1 \ldots \overline{t}_{m-2}\, t_{m-1}$$
$$+ 0\,(1 - X)\, X_m \overline{t}_1 \ldots \overline{t}_{m-1} + 0\,(1 - X)\, X_1 t_1 \overline{t}_2 \ldots \overline{t}_{m-1} + \&c.$$
$$+ \text{términos cuyos coeficientes son } \frac{1}{0}. \qquad (8)$$

Ha de notarse en esta expresión que XX_m denota la suma de aquellos constituyentes que son comunes a X y X_m, siendo dada esa suma al multiplicar X y X_m de acuerdo con las reglas del cálculo de la Lógica.

Pasando de la Lógica al Algebra, representaremos por (XX_m) lo que llega a ser el producto anterior cuando, después de hacer la multiplicación, o de seleccionar los constituyentes comunes, damos a los símbolos $x_1, \ldots x_n$, un significado cuantitativo.

Con este conocimiento tendremos, por la Regla General (XVII. 17)

$$\text{Prob. } t$$
$$= \frac{(XX_m)\overline{t}_1 \ldots \overline{t}_{m-1} + (XX_1)\, t_1 \overline{t}_2 \ldots \overline{t}_{m-1} \ldots + (XX_{m-1})\overline{t}_1 \ldots \overline{t}_{m-2} t_{m-1}}{V}, \qquad (9)$$

$$V = X_m \overline{t}_1 \ldots \overline{t}_{m-1} + X_1 t_1 \overline{t}_2 \ldots \overline{t}_{m-1} \ldots + X_{m-1} \overline{t}_1 \ldots \overline{t}_{m-2}\, t_{m-1} \qquad (10)$$

De donde, las relaciones que determinan $x_1, \ldots x_n$, $t_1, \ldots t_{m-1}$, serán del tipo siguiente (variando i de 1 a n),

$$\frac{(x_i\, X_m)\, \overline{t}_1 \ldots \overline{t}_{m-1} + (x_i\, X_1)\, t_1 \overline{t}_2 \ldots \overline{t}_{m-1} \ldots + (x_i\, X_{m-1})\, \overline{t}_1 \ldots \overline{t}_{m-2}\, t_{m-1}}{c_i}$$
$$= \frac{X_1 t_1 \overline{t}_2 \ldots \overline{t}_{m-1}}{a_1} \ldots = \frac{X_{m-1}\, \overline{t}_1 \ldots \overline{t}_{m-2}\, t_{m-1}}{a_{m-1}} = V. \qquad (11)$$

A partir del sistema anterior, eliminaremos a continuación los símbolos $t_1, \ldots t_{m-1}$.

Tenemos

$$t_1 \overline{t}_2 \ldots \overline{t}_{m-1} = \frac{a_1 V}{X_1}, \qquad \overline{t}_1 \ldots \overline{t}_{m-2}\, t_{m-1} = \frac{a_{m-1} V}{X_{m-1}}. \qquad (12)$$

Sustituyendo estos valores en (10) hallamos

$$V = X_m \bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-1} + a_1 V \ldots + a_{m-1} V.$$

Por lo cual

$$\bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-1} = \frac{(1 - a_1 \ldots - a_{m-1})\, V}{X_m}.$$

Ahora sea

$$a_m = 1 - a_1 \ldots - a_{m-1}, \tag{13}$$

y tenemos entonces

$$\bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-1} = \frac{a_m V}{X_m}. \tag{14}$$

Ahora, reduciendo, por medio de (12) y (14), la ecuación (9) y la ecuación formada al igualar la primera línea de (11) al símbolo V; escribiendo también Prob. X por Prob. t, tenemos

$$\text{Prob. } X = \frac{a_1 (XX_1)}{X_1} + \frac{a_2 (XX_2)}{X_2} \ldots + \frac{a_m (XX_m)}{X_m}, \tag{15}$$

$$\frac{a_1 (x_i X_1)}{X_1} + \frac{a_2 (x_i X_2)}{X_2} \ldots + \frac{a_m (x_i X_m)}{X_m} = c_i; \tag{16}$$

en donde X_m y a_m son dadas por (7) y (13).

Estas ecuaciones incluyen la solución directa del problema que estamos considerando. En (16) tenemos el tipo de n ecuaciones (formadas al dar a i los valores 1, 2 ...n sucesivamente), a partir de las que se hallarán los valores de $x_1, x_2, \ldots x_n$, y aquellos valores sustituidos en (15) dan el valor de la Prob. X como una función de las constantes a_1, c_1, etc.

Merece tenerse en cuenta una conclusión, que se puede deducir de la solución anterior, y es que si las probabilidades de los sucesos compuestos $X_1, \ldots X_{m-1}$, son las mismas que serían si los sucesos $x_1, \ldots x_n$ fueran enteramente independientes, y con probabilidades dadas $c_1, \ldots c_n$, entonces, la probabilidad del suceso X será la misma que si hubiera sido calculada sobre la misma hipótesis de la absoluta independencia de los sucesos $x_1, \ldots x_n$. Pues, sobre la hipótesis supuesta, la suposición $x_1 = c_1, x_n = c_n$, en el sistema cuantitativo daría $X_1 = a_1, X_m = a_m$, por lo cual, (15) y (16) darían

$$\text{Prob. } X = (XX_1) + (XX_2) \ldots + (XX_m), \tag{17}$$

$$(x_i X_1) + (x_i X_2) \ldots + (x_i X_m) = c_i. \tag{18}$$

Pero, puesto que $X_1 + X_2 ... + X_m = 1$, es evidente que el segundo miembro de (17) se formará tomando todos los constituyentes contenidos en X, y dándoles un significado algebraico. Y una observación similar puede aplicarse a (18). Por consiguiente esas ecuaciones dan respectivamente

Prob. X (lógica) = X (algebraica)

$$x_i = c_i .$$

Por lo tanto, si $X = \phi\ (x_1, x_2, \ldots x_n)$, tenemos

$$\text{Prob. } X = \phi\ (c_1, c_2, \ldots c_n),$$

que es el resultado en cuestión.

Por lo cual, resultará también que si las cantidades $c_1, \ldots c_n$ fueran indeterminadas y no se hicieran hipótesis sobre la posesión de un valor medio común, el sistema (15) (16) sería satisfecho dando a esas cantidades cualesquiera de aquellos valores $x_1, x_2, \ldots x_n$ que satisfarían las ecuaciones

$$X_1 = a_1 \ldots X_{m-1} = a_{m-1}, \quad X = a,$$

suponiendo que el valor del elemento a, como los valores de $a_1, \ldots a_{m-1}$, fueran proporcionados por la experiencia.

9. Antes de aplicar la solución general (15) (16) a la cuestión de la probabilidad de los juicios, será conveniente hacer la siguiente transformación. Sean los datos

$$x_1 = c_1 \ldots . x_n = c_n,$$

$$\text{Prob. } X_1 = a_1 \ldots . \text{ Prob. } X_{m-2} = a_{m-2};$$

y pidásenos el determinar la Prob. X_{m-1}, cuyo valor desconocido representaremos por a_{m-1}. Entonces en (15) y (16) debemos cambiar

$$\begin{array}{ll} X \text{ en } X_{m-1}, & \text{Prob. } X \text{ en } a_{m-1}, \\ X_{m-1} \text{ en } X_{m-2}, & a_{m-1} \text{ en } a_{m-2}. \\ X_m \text{ en } X_{m-1} + X_m, & a_m \text{ en } a_{m-1} + a_m; \end{array}$$

con estas transformaciones, y observando que $(X_{m-1}\, X_r) = 0$, excepto cuando $r = m - 1$ y que es entonces igual a X_{m-1}, las ecuaciones (15) (16) dan

$$a_{m-1} = \frac{(a_{m-1} + a_m)\, X_{m-1}}{X_{m-1} + X_m}, \tag{19}$$

$$c_i = \frac{a_1 (x_i\, X_1)}{X_1} \ldots + \frac{a_{m-2} (x_i\, X_{m-2})}{X_{m-2}} + \frac{(a_{m-1} + a_m)\, (x_i\, X_{m-1} + x_i\, X_m)}{X_{m-1} + X_m} \tag{20}$$

Ahora bien, a partir de (19) hallamos

$$\frac{X_{m-1}}{a_{m-1}} = \frac{X_m}{a_m} = \frac{X_{m-1} + X_m}{a_{m-1} + a_m},$$

en virtud de lo cual el último término de (20) puede reducirse a la forma

$$\frac{a_{m-1}\,(x_i\,X_{m-1})}{X_{m-1}} + \frac{a_m\,(x_i\,X_m)}{X_m}$$

Con estas reducciones los sistemas (17) y (18) pueden reemplazarse por el siguiente sistema simétrico, a saber,

$$\frac{X_{m-1}}{a_{m-1}} = \frac{X_m}{a_m}, \tag{21}$$

$$\frac{a_1\,(x_i\,X_1)}{X_1} + \frac{a_2\,(x_i\,X_2)}{X_2} \cdot\cdot + \frac{a_m(x_i\,X_m)}{X_m} = c_i. \tag{22}$$

Estas ecuaciones, en conexión con (7) y (13), nos capacitan para determinar a_{m-1} como función de $c_1 \ldots c_n$, $a_1 \ldots a_{m-2}$, suponiendo que los datos numéricos son proporcionados por la experiencia. Procedemos ahora a su aplicación.

PROPOSICION III

10. *Dado un sistema de probabilidades extraído de casos de unanimidad registrados o de una mayoría numérica señalada en las decisiones de una asamblea deliberante; se pide a partir de una hipótesis determinada, la probabilidad media de juicio correcto de parte de un miembro de la asamblea.*

En una parte anterior de este capítulo se ha insinuado de qué manera pueden determinarse a partir de la experiencia las probabilidades de decisión unánime y de mayorías numéricas específicas. Tomando la notación de la Prob. 1 representaremos los sucesos cuyas probabilidades se nos dan por las funciones $X_1, X_2, \ldots X_{m-1}$. Se ha patentizado de la misma naturaleza del caso que estos sucesos son mutuamente excluyentes, y que las funciones por las que se representan son simétricas con respecto a los símbolos $x_1, x_2, \ldots x_n$. Seguimos utilizando esos símbolos en el mismo sentido que en la Prop. I a saber, entendemos por X_i aquel suceso que consiste en la formación de una opinión correcta por el miembro número *i* de la asamblea.

Ahora bien, los datos inmediatos de la experiencia son

$$\text{Prob. } X_1 = a_1, \quad \text{Prob. } X_2 = a_2, \ldots \text{Prob. } X_{m-2} = a_{m-2}, \tag{1}$$

$$\text{Prob. } X_{m-1} = a_{m-1}. \tag{2}$$

siendo $X_1 \ldots X_{m-1}$ funciones de los símbolos lógicos $x_1, \ldots x_n$ y asignando el valor indeterminado c a las probabilidades de los sucesos que denotan tendremos

$$\text{Prob.}\, x_1 = \text{Prob.}\, x_2 \ldots = \text{Prob.}\, x_n = c. \tag{3}$$

Ahora bien, se ha visto, Prop. I, que los datos inmediatos (1), (2), sin ayuda de ninguna hipótesis, nos llevan simplemente a un replanteamiento del problema. Por otra parte, es patente que si, adoptando los métodos de Laplace y Poisson, empleamos sólo el sistema (3) como datos para la aplicación del método de esta obra, comparando finalmente los resultados obtenidos con el sistema experimental (1) (2), estamos apoyándonos *totalmente* sobre una hipótesis dudosa, la independencia de los juicios individuales. Pero aunque no deberíamos apoyarnos totalmente en esta hipótesis, no podemos prescindir completamente de ella o de algún sustituto equivalente. Examinemos, pues, las consecuencias de una independencia *limitada* de los juicios individuales; siendo proporcionadas las condiciones de limitación por los datos aparentemente superfluos. A partir del sistema (1) (3) determinemos, por el método de este trabajo, la Prob. X_{m-1}, y comparando el resultado con (2), determinemos c. Incluso aquí se requiere un poder arbitrario de selección. Pero está claro a partir de la Prop. I que algo de este tipo es inevitable a fin de obtener alguna solución. En cuanto al principio de selección, entiendo que la ecuación (2) reservada para una comparación final, debería ser aquella que, a partir de la magnitud de su elemento numérico a a_{m-1}, se considera como la más importante de las series primarias proporcionadas por la experiencia.

Ahora bien, a partir del carácter mutuamente excluyente de los sucesos denotados por las funciones X_1, $X_2, \ldots X_{m-1}$, las ecuaciones concluyentes de la proposición anterior se hacen aplicables. A causa de la simetría de las mismas funciones, y la reducción del sistema de valores indicado por c_i a un único valor c, las ecuaciones representadas por (22) se hacen idénticas, los valores de $x_1, x_2, \ldots x_n$ se hacen iguales y pueden reemplazarse por un solo valor x, y tenemos simplemente

$$\frac{X_{m-1}}{a_{m-1}} = \frac{X_m}{a_m}, \tag{4}$$

$$\frac{a_1(xX_1)}{X_1} + \frac{a_2(xX_2)}{X_2} \ldots + \frac{a_m(xX_m)}{X_m} = c. \tag{5}$$

Lo siguiente es la naturaleza de la solución así indicada:

Siendo dadas en los datos las funciones $X_1, \ldots X_{m-1}$, y los valores $a_1 \ldots a_{m-1}$, tenemos primero,

$$X_m = 1 - X_1 \ldots - X_{m-1},$$
$$a_m = 1 - a_1 \ldots - a_{m-1}.$$

De cada una de las funciones $X_1, X_2, \ldots X_m$ así dadas o determinadas, debemos seleccionar aquellos constituyentes que contengan un símbolo particular, como x_1, para un factor. Esto determinará las funciones (xX_1), (xX_2), etc., y entonces en todas las funciones debemos cambiar $x_1, x_2, \ldots x_n$ individualmente por x. O podemos considerar una función algebraica X_i en el sistema (4) (5) como expresión de la probabilidad del suceso indicado por la función lógica X_i, suponiendo que los símbolos lógicos $x_1, x_2, \ldots x_n$ denotan sucesos independientes cuya probabilidad común es x. A partir de la misma suposición (xX_i) denotaría la probabilidad de la coincidencia de cualquier suceso particular de la serie $x_1, x_2, \ldots x_n$ con X_i. Estando determinadas las formas de X_i, (xX_i), etc., la ecuación (4) da el valor de x y éste, sustituido en (5), determina el valor del elemento c pedido. De los dos valores que ofrecerá su solución, siendo uno mayor y el otro menor de $\frac{1}{2}$, debe escogerse el mayor, cuandoquiera que basándonos en las consideraciones generales, se piense que es más probable que un miembro de la asamblea juzgue correctamente, que juzgue incorrectamente.

Aquí pues, basándonos en el principio supuesto de que el mayor de los valores a_{m-1} será reservado para una comparación final en la ecuación (2), tenemos una solución definida del problema propuesto. Y la misma forma de solución es aplicable caso de que cualquier otra ecuación del sistema, basándose en otro fundamento, como el de mayor precisión, fuera similarmente reservada en lugar de (2).

11. Examinemos hasta qué punto ha influenciado la condición anterior a la solución final. Es evidente que la ecuación (5) es completamente independiente de la elección en cuestión. Lo mismo es el segundo miembro de la (4). Si hubiéramos reservado la función X_1, en vez de X_{m-1}, la ecuación para la determinación de x hubiera sido

$$\frac{X_1}{a_1} = \frac{X_m}{a_m}; \tag{6}$$

pero el valor de x determinado así todavía tendría que ser sustituido en la misma ecuación final (5) Sabemos que si los sucesos $x_1, x_2, \ldots x_n$ fueran realmente independientes, las ecuaciones (4), (6) y todas las demás de las que son tipos probarían que son equivalentes y que el valor de x proporcionado por cualquiera de ellas sería el verdadero valor de c. Esto proporciona un medio de comprobar (5). Pues si esta ecuación fuera correcta, debería, bajo las anteriores circunstancias, ser satisfecha por la suposición $c = x$. En otras palabras, la ecuación

$$\frac{a_1(xX_1)}{X_1} + \frac{a_2(xX_2)}{X_2} \ldots + \frac{a_m(xX_m)}{X_m} = x \tag{7}$$

debería dar el mismo valor de x al resolverse que la ecuación (4) ó (6). Ahora bien, este será el caso. Puesto que, por hipótesis

$$\frac{X_1}{a_1} = \frac{X_2}{a_2} \ldots = \frac{X_m}{a_m},$$

tenemos, por un conocido teorema

$$\frac{X_1}{a_1} = \frac{X_2}{a_2} \cdot \cdot = \frac{X_m}{a_m} = \frac{X_1 + X_2 \cdot \cdot + X_m}{a_1 + a_2 \cdot \cdot + a_m} = 1.$$

Por consiguiente (7) se convierte al sustituir a_1 por X_1, etc., en

$$(xX_1) + (xX_2) \cdot \cdot + (xX_m) = x$$

una mera identidad.

Siempre que, por consiguiente, los sucesos $x_1, x_2, \cdot \cdot x_n$ sean realmente independientes, el sistema (4) (5) es correcto y es independiente de la arbitrariedad del primer paso del proceso por el que se obtuvo. Cuando los sucesos dichos no son independientes, el sistema final de ecuaciones poseerá un elemento arbitrario, dejando en suspenso el principio de selección establecido arriba. Pero puede deducirse de la forma persistente de la ecuación (5) que la solución es arbitraria en un grado menor que las soluciones a las que nos llevaría la hipótesis de la independencia absoluta de los juicios individuales.

La discusión de los límites del valor de c en tanto dependiente de los límites del valor de x, determinaría tales puntos.

Estas consideraciones nos sugieren la cuestión de si la ecuación (7), que es simétrica con referencia a las funciones $X_1, X_2, \ldots X_m$, libre de elementos arbitrarios y rigurosamente exacta cuando los sucesos $x_1, x_2, \cdot \cdot x_n$ son realmente independientes, no pudiera aceptarse como una solución media general del problema. La manera adecuada de determinar este punto sería, creo, averiguar si el valor de x que proporcionaría estaría, en general, dentro de los límites del valor de c como determinado por los sistemas de ecuaciones de los que el sistema (4), (5) presenta el tipo. Parece probable que bajo circunstancias ordinarias este sería el caso. Independientemente de tales consideraciones, sin embargo, podemos considerar (7) como la expresión de un cierto principio de solución, a saber, que considerando a $X_1, X_2, \ldots X_m$ como *causas* exclusivas del suceso cuya probabilidad es x, aceptamos las probabilidades de esas causas $a_1, \ldots a_m$ a partir de la experiencia, pero formamos las probabilidades condicionales del suceso como dependientes de tales causas.

$$\frac{(xX_1)}{X_1}, \quad \frac{(xX_2)}{X_2}, \text{ \&c. (XVII. Prop. 1.)}$$

sobre la hipótesis de la independencia de juicios individuales, y así deducimos la ecuación (7). Considero que esto es, de todas formas, menos riguroso, aunque posiblemente en la práctica un modo de proceder más conveniente que el que se adoptó en la solución general.

12. Ahora sólo queda asignar las formas particulares que toman las funciones algebraicas X_i, (xX_i), etc., en las ecuaciones anteriores cuando la función lógica X_i

representa aquel suceso consistente en que r miembros de la asamblea voten de una manera y $n - r$ miembros de la otra forma. Es evidente que en este caso la función algebraica X_i expresa lo que sería la probabilidad del suceso supuesto si todos los sucesos $x_1, x_2, \ldots x_n$ fueran independientes y su probabilidad común fuera medida por x. Por lo tanto tendríamos, por el Art. 3,

$$X_i = \frac{n(n-1)..(n-r+1)}{1 \cdot 2 \ldots r} \{x^r + (1-x)^{n-r}\}.$$

Bajo las mismas circunstancias (xX_i) representaría la probabilidad del suceso compuesto, que consiste en que un determinado miembro de la asamblea forme un juicio correcto, conjuntamente con el estado general de votar registrado antes. Por consiguiente, sería la probabilidad de que un cierto miembro vote correctamente, mientras que de los restantes n − 1 miembros, r − 1 voten correctamente; o que el mismo miembro vote correctamente, mientras que de los restantes n − 1 miembros r voten incorrectamente. Por lo tanto

$$(xX_i) = \frac{(n-1)(n-2)..(n-r+1)}{1 \cdot 2 \ldots r-1} x^r + \frac{(n-1)(n-2)..(n-r)}{1 \cdot 2 \ldots r} x^{n-r}.$$

PROPOSICION IV

13. *Dado cualquier sistema de probabilidades extraído de casos de unanimidad registrados, o de una mayoría numérica señalada en las decisiones de una sala de justicia, se busca, sobre hipótesis parecidas a las de la última proposición, la probabilidad media c de juicio correcto para un miembro del Tribunal, y la probabilidad general k de culpabilidad de una persona acusada.*

La solución de este problema se diferencia muy poco de la solución anterior y puede remitirse a las mismas fórmulas generales (4) y (5) ó (7). Hay que observar que como hay dos elementos c y k por determinar, es necesario reservar dos de las funciones $X_1, X_2, \ldots X_{m-1}$, supongamos X_1 y X_{m-1}, para una comparación final, empleando o las restantes funciones m − 3 en la expresión de los datos, o los dos grupos respectivos $X_2, X_3, \ldots X_{m-1}$, y $X_1, X_2, \ldots X_{m-2}$.

En cualquier caso se supone que debe haber al menos dos datos originales independientes. Si se emplea sólo la ecuación (7), proporcionaría en este ejemplo dos ecuaciones, que pueden escribirse así

$$\frac{a_1(xX_1)}{X_1} + \frac{a_2(xX_2)}{X_2} \ldots + \frac{a_m(xX_m)}{X_m} = x, \tag{1}$$

$$\frac{a_1(kX_1)}{X_1} + \frac{a_2(kX_2)}{X_2} \ldots + \frac{a_m(kX_m)}{X_m} = k. \tag{2}$$

Estas ecuaciones han de emplearse de la siguiente forma: Representen $x_1, x_2, \ldots x_n$ aquellos sucesos que consisten en la formación de una opinión correcta por los miembros del Tribunal respectivamente; w representará aquel suceso consistente en la culpabilidad del miembro acusado. Con la ayuda de estos símbolos podemos expresar lógicamente las funciones X_1, $X_2, \ldots X_{m-1}$, cuyas probabilidades son dadas, así como también la función X_m. Entonces, a partir de la función X_1, seleccionar aquellos constituyentes que contienen, como factor, cualquier símbolo particular del grupo $x_1, x_2, \ldots x_n$, y también aquellos constituyentes que contienen como factor a w. En ambos resultados cambiar $x_1, x_2, \ldots x_n$ respectivamente por x y w por k. Los anteriores resultados darán (xX_1) y (kX_1). Efectuando las mismas transformaciones en todo el sistema (1), (2) determinará x y k basándose en la hipótesis implicada.

14. Podemos reunir a partir de las investigaciones anteriores los siguientes hechos y conclusiones:

PRIMERO.— Que a partir de los meros registros de acuerdo o desacuerdo en las opiniones de cualquier grupo de hombres, no pueden sacarse conclusiones numéricas definidas con respecto a la probabilidad de juicio correcto en un miembro individual del grupo, o el mérito de las cuestiones sometidas a su consideración.

SEGUNDO.— Que tales conclusiones pueden extraerse de varias hipótesis diferentes, como: Primero.— A partir de la hipótesis corriente sobre la absoluta independencia de juicios individuales; Segundo.— A partir de ciertas modificaciones determinadas de esa hipótesis garantizada por los datos reales; Tercero.— A partir de un principio de solución distinto sugerido por la aparición de una forma común en las soluciones obtenidas por las modificaciones a las que antes hemos aludido.

En último lugar, que cualquier duda que pueda acompañar a los resultados finales no se basa en la imperfección del método, que se adapta igualmente a todas las hipótesis, sino en la incertidumbre de las hipótesis mismas.

De todas formas, parece probable que incluso con los más amplios límites de hipótesis, consistentes con el tener en cuenta *todos* los datos de la experiencia, la desviación de los resultados obtenidos sería muy ligera, y sus valores medios podrían determinarse con gran seguridad por los métodos de la Proposición III. De estos métodos, estaría inclinado a dar la preferencia al primero. Habiéndose llegado a un acuerdo sobre ese principio de solución media, otras consideraciones parecen indicar que los valores c y k para tribunales y asambleas que tengan una constitución determinada, y que sean gobernados en sus deliberaciones por reglas fijas, permanecerían casi constantes, sujetos de todas formas a una pequeña variación secular dependiente del progreso del conocimiento y de la justicia entre el género humano. Actualmente existen unos pocos, si es que existe alguno, datos adecuados para su determinación.

CAPITULO XXII

SOBRE LA NATURALEZA DE LA CIENCIA Y LA CONSTITUCION DEL INTELECTO

1. Entiendo por constitución de un sistema el conjunto de aquellas causas y tendencias que producen su naturaleza observada cuando obran sin interferencia bajo aquellas condiciones a las que se concibe que el sistema ha de adaptarse. Nuestro juicio acerca de tal adaptación debe fundarse sobre un estudio de las circunstancias en las que el sistema logra su más libre acción, produce sus más armoniosos resultados, o cumple, de alguna forma, el propósito de su construcción. Existen casos en que conocemos distintamente las causas sobre las que depende la operación de un sistema, así como sus condiciones y su fin. Este es el conocimiento más perfecto relativo a la materia que se considera. Hay también casos en los que sabemos, solo imperfectamente o parcialmente, las causas en que están actuando, mas somos capaces, sin embargo de determinar hasta cierto punto las leyes de su acción, y aun de descubrir tendencias generales, y de deducir algún propósito ulterior. Así se ha concluído, creo que correctamente, que hay una facultad moral en nuestra naturaleza, no porque podamos comprender los medios especiales con los que funciona, como conectamos el órgano con la facultad de la visión, ni sobre la base de que los hombres estén de acuerdo en la adopción de normas de conducta universales, sino porque mientras, de una forma u otra, el sentimiento de aprobación o desaprobación moral se manifiesta en todas, tiende, dondequiera que el progreso humano es observable, dondequiera que la sociedad humana no sea ni estacionaria ni se apresure hacia la decadencia, a unirse a cierto tipo de acciones unánimemente y de una forma indicativa tanto de permanencia como de ley. Siempre y en todas partes la manifestación de Orden proporciona una suposición que no es medible, desde luego, pero real (XX 22), del cumplimiento del fin o propósito y de la existencia de un fundamento de causalidad ordenada.

2. La cuestión particular de la constitución del intelecto, casi es innecesario decirlo, ha atrído los esfuerzos del ingenio especulativo en todas las épocas. Pues no sólo se dirige a ese deseo de conocimiento que los grandes maestros del pensamiento antiguo creían innato a nuestra especie, sino que añade a la fuerza ordinaria de este motivo el aliciente de un interés humano y personal. Una devoción genuina a la verdad es, desde luego, rara vez parcial en sus objetivos, pero mientras estimula a

extenderse sobre los campos de la observación externa, prohibe descuidar el estudio de nuestras propias facultades. Incluso en épocas extremadamente dedicadas a intereses materiales, alguna parte de la corriente del pensamiento ha sido reflejada hacia dentro y el deseo de entender aquello por lo que se comprende todo lo demás ha sido frustrado sólo con el fin de ser renovado.

Es probable que esta *perseverancia* en el esfuerzo no hubiera sido mantenida entre sinceros investigadores de la verdad si la convicción general hubiera sido que tales especulaciones son irremediablemente estériles. Podemos pensar que se ha pensado que si algo de error e incertidumbre, siempre incidental a un estado de información parcial, ha de acompañar a los resultados de tales preguntas, puede quedar aún un residuo de conocimiento positivo; que las contradicciones con las que nos encontramos son más a menudo verbales que reales; sobre todo, que incluso conclusiones *probables* proporcionan aquí un valor y un interés que por su tema las hace no indignas de exigir atención junto con los resultados más determinados y espléndidos de la ciencia física. Así como han de considerarse insolubles muchos de los problemas vinculados a la investigación de la naturaleza y la constitución de la mente, no faltan otros sobre los que se puede llegar a conseguir un conocimiento limitado pero no dudoso, y otros sobre los que son asequibles las conclusiones de una analogía altamente probable. Así como las esferas del día y la noche no son estrictamente limítrofes, sino que están separadas por una zona crepuscular, a través de la que la luz de una se apaga gradualmente en la oscuridad de la otra, así se puede decir que toda región de conocimiento positivo está rodeada por un territorio discutible y especulativo, sobre el que extiende su influencia y su luz hasta cierto punto. Así, puede haber cuestiones relacionadas con la constitución del intelecto que, aunque no admiten, en el estado actual de conocimiento, de una decisión absoluta, pueden recibir tanta información refleja como para no hacer su solución probable difícil. Y también puede haber cuestiones relacionadas con la naturaleza de la ciencia, e incluso con verdades particulares y doctrinas científicas, sobre las que, quienes aceptan los principios generales de esta obra, no pueden por menos que ser abocados a mantener opiniones positivas, diferentes quizás de aquellas aceptadas normalmente hoy en día. (33). En lo que sigue, recapitularé algunas de las conclusiones más definidas establecidas en las partes anteriores de este tratado, e indicaré a continuación una o dos corrientes de pensamiento relacionadas con los temas generales a los que hemos aludido anteriormente que me parece son sugeridas por aquellas.

3. Entre aquellas conclusiones, relacionadas con la constitución intelectual, que pueden considerarse como pertenecientes a la esfera del conocimiento positivo, podemos considerar las leyes científicas del pensamiento y del razonamiento, que han formado las bases de los métodos generales de este tratado, junto con los principios del capítulo V, por los que se ha determinado su aplicación. La descomposición del campo del pensamiento en dos esferas diferentes pero coexistentes (IV.11); la sujeción de las operaciones individuales dentro de esas esferas a un

sistema común de leyes (XI); el carácter matemático general de esas leyes, y su expresión efectiva (II. III); su grado de afinidad con las leyes del pensamiento en la esfera del número; y el punto de su divergencia del mismo; el carácter dominante de las dos concepciones limitantes del universo y la eternidad entre todos los temas del pensamiento que competen a la Lógica; la relación de aquellas concepciones con el concepto fundamental de unidad en la ciencia del número, éstos, con otros muchos resultados similares, no han de ser catalogados como conclusiones meramente probables o analógicas, sino que tienen derecho a ser considerados como verdades de la ciencia. El que sean llamados Metafísicos o no, es una cuestión indiferente. La naturaleza de la prueba sobre la que se basan, aunque de distinta clase, no es inferior en valor a ninguna que pueda ser presentada en favor de las verdades generales de la ciencia física.

Además, hay acuerdo en que hay un cierto orden observable en el progreso de todas las formas más exactas del conocimiento. El estudio de todo departamento de la ciencia física comienza con la observación, prosigue con la reunión de los hechos basándose en un presunto conocimiento de la ley que los relaciona, pone a prueba la validez de tal suposición por medio de nuevos experimentos ideados para incrementar, si la suposición está bien fundamentada, su probabilidad indefinidamente, y finalmente, corona la investigación, habiéndose determinado con bastante seguridad la ley del fenómeno, la investigación de las causas, llevada a cabo con la debida mezcla de hipótesis y deducción. En este orden progresivo de conocimiento, las facultades y leyes particulares, de cuya naturaleza se ha tratado en este libro, tienen su parte. Es evidente, por lo tanto, que si investigamos imparcialmente la naturaleza de la ciencia, o la constitución intelectual en su relación con la ciencia, ninguna parte de las dos series presentadas con anterioridad debe ser considerada aislada. Más especialmente deben considerarse en su mutua relación y conexión aquellas verdades que están en cualquier clase de relación *suplementaria* entre sí.

4. Así pues, la necesidad de una base experimental para todo conocimiento positivo, vista en conexión con la existencia y el carácter peculiar de aquel sistema de leyes mentales, y principios, y operaciones, a los que se ha prestado atención tiende a proyectar un poco de luz sobre unas cuantas cuestiones importantes por las que el mundo del pensamiento especulativo está todavía en gran medida dividido. ¿Cómo, a partir de los hechos particulares que nos ofrece la experiencia, llegamos a las proposiciones generales de la ciencia? ¿Cuál es la naturaleza de estas proposiciones? ¿Son solamente recolecciones de la experiencia, o proporciona la mente algún principio de conexión propio? En una palabra, ¿cuál es la naturaleza de la verdad científica, y cuáles son las de aquella confianza con la que pretende ser recibida?

Debe ser evidente que a cuestiones como estas no se puede dar una respuesta única y general. Hay casos en los que incluso ni necesitan discusión. Se dan casos bastante corrientes cuyas proposiciones generales expresan simplemente, *per enumerationem simplicem*, un hecho establecido por la observación efectiva en todos los casos a los que alude la proposición. El astrónomo afirma, basándose en este

fundamento, que todos los planetas conocidos se mueven de oeste a este alrededor del sol. Pero también hay casos en que se suponen proposiciones generales a partir de la observación de su verdad en determinados casos, y de la extensión de esa verdad a casos no observados. Ningún principio de razonamiento meramente deductivo puede garantizar tal proceder. Cuando a partir de un gran número de observaciones del planeta Marte, Kepler dedujo que giraba en una elipse, la conclusión fué más amplia que sus premisas o, desde luego, más amplia que cualquiera de las premisas que la sola observación podía ofrecer. ¿Qué otro elemento es, pues, necesario para dar una validez incluso prospectiva a generalizaciones como ésta?. Es la capacidad inherente a nuestra naturaleza para apreciar el Orden, y la suposición concurrente, como quiera que se fundamente, de que los fenómenos de la Naturaleza están conectados por un principio de orden. Sin ellas, nunca se hubieran podido averiguar las verdades generales de la ciencia física. Si se concede que el procedimiento así establecido puede llevarnos solo a resultados probables o aproximados, se sigue que incluso el mayor número de generalizaciones de la ciencia física posee solo una verdad probable, o aproximada. La seguridad de la posesión del conocimiento consiste en que dondequiera que tales conclusiones representen verazmente la constitución de la naturaleza, nuestra confianza en su verdad queda totalmente confirmada, y enseguida se convierte en algo que no se puede distinguir de la certeza. La existencia de aquel principio representado anteriormente como la base del razonamiento inductivo, nos capacita para resolver la tan discutida cuestión de la necesidad de proposiciones generales en el razonamiento. El Lógico afirma que es imposible deducir una conclusicón de premisas particulares. Autores modernos de gran reputación han mantenido que todo razonamiento se hace de verdades particulares a verdades particulares. Ponen como ejemplo el que al concluir de la posesión de una propiedad por ciertos miembros de una clase, que algún otro miembro también la posee, no es necesario establecer la conclusión *general* intermedia que afirma su posesión por *todos* los miembros de la clase en común. Ahora bien, sea o no así, ese principio de orden o analogía sobre el que se dirige el razonamiento debe ser o establecido o entendido como una verdad general para dar validez a la conclusión final. De esta manera, al menos, se confirma la necesidad de proposiciones generales como base de la inferencia, una necesidad que, sin embargo, pienso está implicada en la misma existencia, y aún más, en la *naturaleza* peculiar de aquellas facultades cuyas leyes han sido estudiadas en esta obra. Pues, si analizamos cuidadosamente el proceso de razonamiento, se verá que la abstracción se hace de todas las peculiaridades del individuo al que se refiere la conclusión, y se limita la atención a aquellas propiedades por las que se determina su pertenencia a la clase.

5. Pero además de las proposiciones generales que se derivan por inducción a partir de los hechos de la experiencia cotejados, existen otras que pertenecen al dominio de lo que se califica como verdad *necesaria*. Tales son las proposiciones generales de la aritmética, así como las proposiciones que expresan las leyes del pensamiento sobre las que se basan los métodos generales de este tratado; y estas proposiciones no solo pueden comprobarse rigurosamente en casos particulares, sino

que se manifiestan en toda su generalidad a partir del estudio de casos determinados. Además, existen proposiciones generales que expresan verdades necesarias pero no susceptibles de ser comprobadas exactamente por la imperfección de los sentidos. Algunas, si no todas, de las proposiciones de la Geometría son de este tipo, mas estas proposiciones no se encuentran sólo en el campo de la Geometría. La cuestión referente a su naturaleza y origen es muy antigua, y como está más íntimamente conectada con la investigación de la constitución del intelecto que cualquier otra a la que hayamos aludido, no estará de más el considerla aquí. Entre las opiniones sobre el tema que han prevalecido más ampliamente se hallan las siguientes. Se ha mantenido que proposiciones del tipo al que nos hemos referido existen en la mente independientemente de la experiencia, y que aquellas concepciones que son sus objetos son las huellas de arquetipos eternos. Con tales arquetipos, concebidos, sin embargo como poseedores de una realidad de la que todos los objetos de los sentidos no son más que una débil sombra u oscura sugerencia, proveyó Platón su mundo ideal. Por otra parte, otros han mantenido que los objetos de tales proposiciones son imitaciones de objetos individuales de experiencia; que son meros nombres; que ellos mismos son objetos individuales de experiencias; y que las proposiciones que a ellos se refieren son, por causa de la imperfección de esos objetos, solo parcialmente verdaderos. Por último, que son productos intelectuales formados por medio de la abstracción a partir de las percepciones sensibles de cosas individuales, pero formados de tal manera que puedan ser objetos de la ciencia, lo que las cosas individuales nunca pueden ser, es decir: objetos de ciencia sobre los cuales puedan afirmarse proposiciones generales y exactas. Y quizás haya aún otros puntos de vista, predominando en algunos de ellos el elemento sensible y en otros el elemento intelectual o ideal.

Ahora bien, si se toma la última de las opiniones a las que hemos aludido antes (puesto que no se propone considerar el punto de vista puramente ideal o el puramente nominalista), y si se investigara cuáles son los adecuados objetos de la ciencia, en el sentido establecido antes, objetos en relación a los cuales sus proposiciones son verdaderas sin ninguna mezcla de error, pensamos que solamente puede darse una única respuesta. Y es que ni los objetos individuales de la experiencia, ni con toda probabilidad las imágenes mentales que sugieren, tienen ningún derecho a este título. Parece que es cierto que, ni en la naturaleza ni en el arte, encontramos algo que concuerde absolutamente con la definición geométrica de una línea recta, o de un triángulo, o de un círculo, aunque la desviación pueda ser inapreciable por los sentidos; y puede pensarse que al menos es dudoso, si podemos formar una imagen mental perfecta, o concepción, con la que el acuerdo fuera más exacto. Pero es indudable que tales concepciones, por muy imperfectas que sean, apuntan a algo más allá de ellas mismas en el acercamiento gradual al cual toda imperfección tiende a desaparecer. Aunque el triángulo perfecto, o cuadrado, o círculo, no exista en la naturaleza, eluda todos nuestros poderes de concepción *representativa* y se nos presente solo en pensamiento como el límite de un proceso de abstracción indefinido, sin embargo, por medio de una facultad maravillosa del entendimiento, puede

hacerse que sea objeto de proposiciones que son *absolutamente* ciertas. De este modo, el dominio de la razón se nos revela como más amplio que el de la imaginación. Verdaderamente si alguien pensara que somos capaces de imaginarnos, con gran precisión, los elementos científicos de la forma, la dirección, la magnitud, etc., estas cosas, tal y como se conciben, serán, desde el punto de vista de esas personas, los objetos adecuados de la ciencia. Pero si, tal y como a mí me parece la opinión más justa, una imperfección irremediable acompaña a todos nuestros intentos de tomar posesión con precisión de estos elementos, entonces sólo podemos afirmar que cuanto más se acercan los objetos externos en realidad, o las concepciones de la imaginación por medio de la abstracción, a ciertos, estados *límites*, nunca, quizás, alcanzados de hecho, tanto más se acercan a la absoluta verdad las proposiciones generales de la ciencia que atañen a esas cosas o concepciones tendiendo a desaparecer la desviación real. Las mismas observaciones se pueden aplicar, hasta cierto punto, también a las ciencias físicas. Las que han sido calificadas como "ideas fundamentales" de aquellas ciencias, como fuerza, polaridad, cristalización, etc. (34), estimo que no son ni productos intelectuales independientes de la experiencia, ni meras copias de cosas externas; pero mientras, por una parte, tienen un antecedente necesario en la experiencia, por la otra requieren para su formación la acción del poder de la abstracción, obedeciendo a alguna facultad general o disposición de nuestra naturaleza que nos estimula a la investigación y nos capacita para la apreciación del orden (35). Así, estudiamos aproximadamente los efectos de la gravitación en los movimientos de los cuerpos celestes, por medio de una referencia a la suposición *limitante*, de que los planetas son esferas perfectas o esferoides. Determinamos aproximadamente la trayectoria de un rayo de luz a través de la atmósfera por un proceso en el que se hace abstracción de todas las influencias perturbadoras debidas a la temperatura. Y tal es el orden de procedimiento en toda las más altas andaduras del conocimiento humano. Ahora bien, lo que hay que destacar en conexión con estos procesos del intelecto es la disposición, y la correspondiente capacidad para ascender desde las imperfectas representaciones de los sentidos y las diversidades de la experiencia individual, a la percepción de verdades generales y puede que también inmutables. Dondequiera que esta disposición y esta capacidad se unan, cada serie de hechos conectados en la Naturaleza puede proporcionar indicios de un orden más exacto que aquel que directamente manifiesta. Pues puede servir como fundamento y ocasión para el ejercicio de aquellos poderes cuya función es aprehender las verdades generales que ciertamente se ejemplifican, mas nunca con absoluta fidelidad en un mundo de cambiantes fenómenos.

6. La verdad de que las leyes fundamentales del pensamiento son matemáticas en su forma, considerada en conexión con el hecho de la posibilidad del error, establecen una base para algunas conclusiones notables. Si dirigiésemos nuestra atención tan sólo hacia la verdad científica podríamos ser llevados a deducir un paralelismo casi exacto entre las operaciones intelectuales y los movimientos de la Naturaleza externa. Supongamos que una persona versada en la ciencia física pero desacostumbrada a reflexionar sobre la naturaleza de sus propias facultades hubiese

sido informada de que se ha comprobado que las leyes de aquellas facultades son matemáticas; es probable que después de que los primeros sentimientos de incredulidad se hubieran calmado surgiría la impresión de que el orden del pensamiento debe, por lo tanto, ser tan necesario como el del universo material. Sabemos que en el ámbito de la ciencia natural, la conexión absoluta entre los elementos inicial y final de un problema, expuesto en la forma matemática, simboliza adecuadamente aquella necesidad física que une el efecto a la causa. La secuencia necesaria de estados y condiciones en el mundo inorgánico, y la conexión necesaria de las premisas y la conclusión en los procesos de demostración exacta aplicados a aquella, parecen ser coordinadas. Puede cuestionarse el asunto de a cual de las dos series es debida la aplicación primaria del término "necesario", si a la observada constancia de la Naturaleza, o a la indisoluble conexión de las proposiciones en todo razonamiento válido sobre sus obras. Históricamente quizás deberíamos dar preferencia a la primera opinión, filosóficamente a la última. Pero el hecho de la conexión es indiscutible, y la analogía a la que apunta es obvia.

Si, pues, se obedecieran uniformemente las leyes del razonamiento válido, existiría un paralelismo muy estrecho entre las operaciones del intelecto y las de la Naturaleza externa. La sujeción a las leyes matemáticas en su forma y expresión, incluso la sujeción de una absoluta obediencia, imprimiría sobre ambas series un carácter común. El dominio de la necesidad sobre el mundo intelectual y sobre el físico sería igualmente completo y universal.

Pero mientras que la observación de la Naturaleza externa atestigua con pruebas de evidencia cada vez mayor que la uniformidad de operación y obediencia invariable a unas leyes señaladas prevalece todo a lo largo de su dominio, la menor atención a los procesos del mundo intelectual nos revela otro estado de cosas. Las leyes matemáticas de razonamiento son sólo, hablando estrictamente, las leyes del razonamiento *correcto*, y su efectiva transgresion es un fenómeno que se repite constantemente. El error, que no tiene lugar en el sistema material, ocupa un lugar muy grande aquí. Debemos aceptar esto como uno de aquellos hechos últimos, la determinación de cuyo origen está más allá del ámbito de la ciencia. Hemos de admitir que existen leyes que no se ven inmunes de la transgresión ni siquiera por el rigor de sus formas matemáticas. Debemos atribuirles una autoridad cuya esencia no consiste en el poder, una supremacía que la analogía del orden inviolable del mundo natural no nos ayuda de ninguna manera a comprender.

Como la distinción así indicada es *real*, permanece inalterada por cualquier peculiaridad en nuestras opiniones respecto a otras partes de la constitución mental. Si consideramos que el intelecto es libre, y aparentemente esta opinión es la que más de acuerdo está con el espíritu general de estas especulaciones, su libertad debe considerarse como algo opuesto al dominio de la necesidad, y no como contrario a la existencia de una determinada supremacía justa de la verdad. Se pueden violar las leyes de la inferencia correcta, pero no por ello dejan en verdad de *existir*. Igualmente permanecen inalteradas en carácter y autoridad si se adopta la hipótesis de la

necesidad en su forma extrema. Concédase que las leyes del razonamiento válido, tal como se las determina en esta obra, o para hablar más en general, tal como aparecerían finalmente en las conclusiones de una análisis exhaustivo, forman solo una *parte* del sistema de leyes por el que son gobernados los procesos efectivos del razonamiento, tanto si son correctos como si son incorrectos. Concédase que si conociéramos el sistema completamente, percibiríamos que todo el procedimiento intelectual era *necesario*, como los movimientos del mundo inorgánicos son necesarios. Y, finalmente, como una consecuencia de esta hipótesis, concédase que los fenómenos del razonamiento incorrecto o error, se presenten donde se presenten, se deben a la interferencia de otras leyes con aquellas leyes cuyo producto es el razonamiento *correcto*. Subsistiría aún el hecho de que existen entre las leyes intelectuales un número separado del resto por esta característica especial, a saber, que todo movimiento del sistema intelectual que se lleva a cabo únicamente bajo su dirección es *correcto*, y que toda interferencia con él por otras leyes no es sólo una interferencia, sino una *violación*. Sólo puede pensarse que esta circunstancia daría a las leyes en cuestión un carácter distintivo y de predominio. Parecerían evidentemente indicar un propósito final que no siempre se logra, poseer una autoridad inherente y justa, pero que no logra siempre ser obedecida.

Ahora bien, un poco de atención mostrará que no hay nada análogo a esto en el gobierno del mundo por la ley natural. El ámbito de la Naturaleza inorgánica no admite ni preferencia ni distinciones. No podemos separar ninguna porción de sus leyes del resto y declararlas como únicas dignas de obediencia, como las únicas encargadas del logro de su más alto propósito. Por el contrario, todas sus leyes parecen estar coordinadas y cuanto mayor es nuestro conocimiento de las mismas más necesaria parece su acción conjunta para la armonía y, hasta donde podemos comprenderlo, para el *propósito* general del sistema. Es innecesario resaltar cuantas veces las más notables desviaciones dentro del orden aparente del mundo inorgánico, tales como las pertubaciones del sistema planetario, la interrupción del proceso de cristalización por la intrusión de una fuerza extraña, y otras del mismo tipo, o se convierten gradualmente en la concepción de algún otro esquema de orden mejor o pierden su aspecto anormal para una contemplación más atenta e instruida. Sólo se puede dar una explicación de estos hechos, a saber, que la distinción entre *verdadero* y *falso, correcto* e *incorrecto*, existe en los procesos del intelecto, pero no en la región de una necesidad física. A medida que avanzamos desde los estados inferiores del ser orgánico hasta el grado más alto de inteligencia consciente empieza a hacérsenos patente de modo gradual este contraste. Dondequiera que se manifiesten los fenómenos de la vida, cede el dominio de la rígida Ley en cierta medida a aquel misterioso principio de actividad. Así, aunque la estructura de las familias animales se conforme a ciertos tipos generales, sin embargo, aquellos tipos quizás, a veces, son siempre imperfectamente cumplidos, en relación a los patrones más altos de belleza y proporción. Las dos alternativas, entre las que el arte fluctúa hoy en día, son la imitación exacta de la forma individual y el intento de llegar a la concepción de una gracia y una expresión ideales mediante la abstracción de todas aquellas

individualidades, nunca manifestadas quizás, en formas de molde terreno. Además, aquellas adaptaciones teleológicas merced a las cuales, sin el sacrificio del tipo orgánico, la especie se adapta a condiciones nuevas y habitats inéditos, se llevan a cabo sólo de un modo gradual y se llevan a cabo, sin embargo, al parecer no por el poder fatal de las circunstancias externas, sino por la extracción de una energía interna. Así, la vida en todas sus formas puede contrastarse con la fija pasividad de la naturaleza inorgánica. Pero en la medida en que la perfección de los tipos en que se manifiesta corpóreamente es en cierta medida de carácter ideal, en la medida en que no podemos definir con precisión la más alta excelencia en cuanto a la forma y la adaptación que se nos sugiere, es menos marcado en este caso el contraste que el que existe entre los procesos intelectuales y los del mundo puramente material. Pues el carácter preciso y técnico de las leyes matemáticas que gobiernan a ambos ilumina con más intensidad la diferencia fundamental entre el tipo de autoridad que, en cuanto a su capacidad de gobierno, ejercitan respectivamente.

7. Se da, sin embargo, otro caso, conectado con los temas generales de este capítulo, en que la comparación de verdades o hechos, extraídos de fuentes distintas, sugiere un curso instructivo a la reflexión. Consiste en la comparación de las leyes del pensamiento, en su expresión científica, con las formas efectivas que la especulación física en los tiempos primitivos y la especulación metafísica en todos los tiempos han tendido a adoptar. Hay dos ejemplificaciones de esta observación a las que en particular deseo prestar atención en este lugar.

PRIMERO.– Se ha mostrado (III.13) que existe una conexión científica entre las concepciones de la unidad en el número y el universo en la Lógica. Ocupan en sus sistemas respectivos el mismo lugar relativo, y están sometidas a las mismas leyes formales. Ahora bien, para la mente griega en aquel estadio temprano de su actividad – un estadio no menos grande, quizás no menos *necesario* al progreso del humano intelecto, que la era de Bacon o Newton en que empezaron a desplegarse los grandes problemas de la Naturaleza – en tanto los medios de observación brillaban por su ausencia y no se entendía su necesidad, parece que se consideró casi idénticos a los términos "el Universo" y "el Uno". Indicar la naturaleza de aquella unidad de la que toda existencia se pensaba era una manifestación constituía la meta principal de la filosofía (36). Tales buscó esta unidad fundamental en el agua. Anaxímenes y Diógenes pensaron que era aire, Hipaso de Metaponto y Heráclito de Efeso aseveraron que se trataba de fuego. Menos preciso o menos seguro de sus opiniones, Parménides declaró simplemente que todas las cosas existentes eran Uno; Meliso que el Universo era infinito, no susceptible de cambio o movimiento, Uno, idéntico a sí mismo, y que el movimiento no era, sino sólo parecía (37). Con un espíritu que para la reflexiva mente de Aristóteles hacía gala de mayor sobriedad en comparación con la basteza de la especulación anterior buscó Anaxágoras de Clazomena en la Inteligencia la causa del mundo y el orden (38), siguiendo quizás los pasos de su conciudadano Hermótimo. La tendencia panteista que impregnaba muchas de estas especulaciones es patente en el lenguaje de Jenófanes, el fundador

de la escuela eleática, quien "contemplando la extensión del cielo, afirmó que el Uno era Dios" (39). Quizás haya pocas formas, si es que hay alguna, en que pueda concebirse la unidad, de forma abstracta como numérica o racional, de forma concreta como sustancia pasiva o como un principio central y viviente de que no hallemos aplicaciones en estas antiguas doctrinas. Los escritos de Aristóteles a que me he referido principalmente, abundan en alusiones de esta naturaleza aunque es probable que de la mayor parte de aquellos que alguna vez se dedicaron a estas especulaciones se haya perdido hasta el nombre. Extraña aunque sugestiva verdad el que mientras la Naturaleza en todo salvo el aspecto de los cielos debe haberse mostrado como poco más que una escena de desorden inexplicado en tanto la creencia popular se hallaba distraída entre la multiplicidad de sus dioses, la concepción de una unidad primordial si bien de forma ruda y material haya echado raices profundas, sobreviviendo en muchas almas pensantes una decepción de por vida y una búsqueda sin término. (40)

SEGUNDO.– En alianza igualmente íntima con aquella ley del pensamiento que se expresa por una ecuación de segundo grado y que ha sido llamada en este tratado la ley de la dualidad se halla la tendencia del pensamiento antiguo hacia aquellas formas de especulación filosófica que se conocen por el nombre de dualismo. La teoría de Empédocles (41) que explicaba las contradiciones aparentes de la naturaleza remitiéndolas a los dos principios opuestos del "combate" y la "amistad" y la teoría de Leucipo (42) que descomponía todo lo existente en los dos elementos de lo *lleno* y lo vacío son de esta naturaleza. La famosa comparación del universo con una lira o un arco (43), siendo su "armonía recurrente" el producto de estados opuestos de tensión, delata idéntico origen. En el sistema de Pitágoras, que parece haber sido una combinación del dualismo con otros elementos derivados del estudio de los números y de sus relaciones, se reconocen diez antitesis fundamentales: finito e infinito, par e impar, la unidad y lo múltiplo, lo recto y lo curvo, la luz y la oscuridad, el bien y el mal, lo cuadrado y lo oblongo. En el de Alcmeón se acepta el mismo dualismo fundamental, mas sin la precisa limitación numérica con que se conecta en el sistema pitagórico. El grandioso desarrollo de esta idea se encuentra, sin embargo, en aquella doctrina maniquea que no sólo formó la base del sistema religioso de Persia sino que se extendió ampliamente por otras regiones del este y se hizo memorable en la historia de la iglesia cristiana. El origen del dualismo en tanto opinión de juez especulativo aún no vinculada con la personificación del Principio del Mal y sucesora natural de aquellas doctrinas que habían indicado la unidad primordial de la Naturaleza, es expuesta así por Aristóteles: "Dado que existían manifiestamente en la Naturaleza cosas opuestas a lo bueno, y no sólo orden y belleza, sino también desorden y deformidad; y dado que las cosas malas predominaban patentemente sobre las buenas y las deformes sobre las bellas, alguno introdujo el combate y la amistad como causas respectivas de estos diversos fenómenos (44) y en Grecia ganó terreno ciertamente la teoría dualística fundamentalmente en tanto opinión filosófica, o como algo adjunto en una especulación filosófica (45). La aplicación moral de la doctrina más en concordancia con la mente griega

está preservada en la gran antitesis platónica del "ser y el no–ser", en la conexión del primero con todo lo que es bueno y verdadero, con las ideas eternas y el mundo arquetípico, y del segundo con el mal, con el error, con los fenómenos perecederos del mundo. Las dos formas de especulación que hemos considerado se mezclaron aquí; y no sólo se dieron durante la juventud y la madurez de la Filosofía griega. Otras épocas imitaron y adoptaron como propio el mismo espíritu. Especialmente dondequiera que el génio de Platón ejerció su dominio se dejó sentir esta influencia. La unidad de todo el ser real, su identidad con la verdad y la bondad consideradas en cuanto a su esencia; el carácter ilusorio, la profunda irrealidad de toda existencia meramente fenoménica; tales fueron los puntos de vista, las disposiciones intelectuales que tendieron principalmente a fomentar. De aquí aquella fuerte tendencia al misticismo que, cuando los días de fama, ya fuera en el ámbito de la iniciativa intelectual o en el de la social, acabaron en Grecia, se hizo predominante en sus escuelas de Filosofía, y alcanzó su punto culminante entre los platónicos alejandrinos. Los tratados espúreos de Dionisio el Areopagita valieron para transmitir la misma influencia, muy modificada por el contacto con las doctrinas aristotélicas, a los disputantes de la Edad Media. No puede proporcionar un fundamento justo para la controversia el decir que la tendencia intelectual de esta manera estimulada era tan poco consistente con una genuina devoción por la verdad, como con una sobria filosofía. Aquella influencia benigna de las afecciones humanas, aquel trato sencillo con las cosas ordinarias de la vida, que forma una parte tan importante, porque así se ha querido que sea, de la verdadera disciplina de nuestra naturaleza, sería mal reemplazado por la contemplación aun del más elevado objeto de pensamiento, considerando por una excesiva abstracción como algo en lo referente a lo cual ni una sola proposición inteligible podría o afirmarse o negarse (46). Aludiré en escasa medida a aquellas especulaciones relacionadas con la Naturaleza Divina que ascribían a la misma la unión perfecta de cualidades opuestas (47), o a los notables tratados de San Anselmo en que se pretendía establecer una teoría del universo a partir de las analogías del pensamiento y el ser (48). La unidad primordial se representa allí como teniendo su morada en la Verdad eterna y única. La conformidad de la Naturaleza a sus leyes, la obediencia de los agentes morales a los dictados de la rectitud, son la misma verdad vista en acción; no siendo el mismo mundo más que una expresión del pensamiento autoreflejado de su Autor (49). Aún más acusado fue el renacer de las antiguas formas de especulación durante los siglos dieciseis y diecisiete. Los amigos y compañeros de Lorenzo el Magnífico, los solitarios conocidos en Inglaterra como platónicos de Cambridge junto con muchos espíritus meditativos esparcidos por Europa, se dedicaron de nuevo ora a la tarea de resolver el viejo problema. De Uno, Vero, Bono, o a la de probar que todo ese tipo de investigaciones son fútiles y vanas (50). Los elementos lógicos que subyacen a todas esas especulaciones, y de los que parecen tomar por lo menos la forma, serían fáciles de hallar en los principios generales de sistemas más modernos, más en aquella asociación de la doctrina de la unidad absoluta con la distinción del *yo* y el *no–yo* como el tipo de la Naturaleza que forma la base de la filosofía de

Hegel. Los esfuerzos de las mentes especulativas por ascender hasta algún elevado pináculo de la verdad desde el que pudieran contemplar la armazón completa y la conexión de las cosas *según el orden del pensamiento deductivo* se han distinguido menos entre sí por las formas de teoría que han producido que por la naturaleza de las interpretaciones que se ha adscrito a aquellas formas (51). Y aquí se halla la cuestión real en lo atañedero a la influencia de los sistemas filosóficos sobre el temperamento y la vida. Pues aunque es de escasa importancia el que los seres humanos coincidan en retrotraer hasta una unidad primordial todas las formas y condiciones del ser, tiene sin embargo importancia lo referente a sus concepciones relativas a dicha unidad y a cuáles son los tipos de relación, además de la de mera causalidad, que mantiene con ellos. Aquí también puede dejarse sentir la impotencia de la mera lógica, la insuficiencia del más profundo conocimiento de las leyes del entendimiento, para resolver aquellos problemas que se hallan más próximos a nuestros corazones a medida que el paso de los años despoja de nuestra vida las ilusiones de su dorado amanecer.

8. Si se considerase el carácter extremadamente arbitrario de la opinión humana no sería de esperar, y no se mantiene aquí que sea ese el caso, que las anteriores sean las únicas formas en que los seres humanos especulativos han dado forma a sus soluciones conjeturales del problema de la existencia. Bajo determinadas influencias han surgido otras formas doctrinales, que no hacian sino enmascarar, sin embargo, con frecuencia las descritas más arriba (52). Mas el amplio predominio de las teorías particulares que hemos considerado, junto con su analogía patente con las leyes del pensamiento manifiestamente establecidas puede pensarse que sugiere una conexión entre ambos sistemas. Así como todos los otros actos y procedimientos mentales se hallan amenazados por sus falacias propias, las operaciones de aquella ley del pensamiento denominada en esta obra ley de la dualidad, puede tener su propia tendencia al error, elevando la mera falta de concordancia a contrariedad, y formar así un mundo que necesariamente consideramos como formado de partes suplementarias entre sí, construyendo la concepción de un mundo fundamentalmente dividido por poderes opuestos. Tal puede haber sido, junto con algunas amplias pero precipitadas inducciones a partir de los fenómenos, el origen del dualismo con independencia de la cuestión de si el dualismo es de alguna manera una teoría verdadera o no lo es. En este lugar, sin embargo, es más importante considerar en detalle la relación de estas antiguas formas de especulación, en su forma renacida actual, con el progreso del conocimiento real; y sobre esta cuestión deseo, en cumplimiento de lo que se ha dicho en la sección precedente, añadir las siguientes consideraciones:

PRIMERO.— Toda filosofía sólida da su veredicto contra tales especulaciones en tanto medios para determinar la constitución efectiva de las cosas. Puede ser que el progreso del conocimiento natural tienda hacia el reconocimiento de alguna Unidad central en la Naturaleza. De unidad en tanto relación mutua entre las partes de un sistema escasamente puede dudarse, y hombres muy capaces han especulado,

no sin fundamento, en torno a una correlación más íntima de las fuerzas físicas de lo que la mera idea de un sistema nos llevaría a conjeturar. Además, podría ser que en el seno de aquella supuesta unidad se hallen contenidos algunos principios generales de división y reunión, fuentes, bajo la Voluntad Suprema, de mucha de la variedad *relacionada* de la Naturaleza. Los ejemplos del sexo y la polaridad han sido aducidos en apoyo de tal opinión. En tanto suposición me aventuraría a añadir que no es muy improbable que, de algún modo a este semejante, la constitución de las cosas externas pueda corresponder a la de la mente. Mas tal correspondencia, si alguna vez se probase que existe, se manifestará como la última inducción no como el primer principio de la investigación científica. El orden natural de los descubrimientos va de lo particular a lo universal, y puede afirmarse con toda confianza que no hemos avanzado aún lo suficiente a lo largo de este camino como para que nos sea permitido determinar cuáles son las últimas formas en que todas la diferencias especiales de la Naturaleza se fundirán y de las que recibirán su explicación.

SEGUNDO.— Si se probase esta correspondencia entre las formas del pensamiento y la efectiva constitución de la Naturaleza, ello no afectaría de ningún modo, fuera cual fuera la conexión o la relación que podría suponerse que estableciera entre los dos sistemas, a la cuestión de su mutua independencia. De ninguna manera nos llevaría a la consecuencia de que un sistema es solamente el *producto* del otro. Una afición excesiva a las especulaciones metafísicas parece haber producido, en algunos casos, una tendencia hacia este tipo de ilusión. Así, entre los muchos intentos que se han hecho para explicar la existencia del mal, se ha intentado atribuir al hecho un carácter meramente *relativo,* fundarlo sobre una especie de oposición lógica al igualmente relativo elemento del bien. Qué mal pueda haber para los ojos de la sabiduría y la pureza Infinitas podemos como mucho conjeturarlo oscuramente; pero para nosotros, en todas sus formas, ya sea en la de dolor o defecto, en la de transgresión moral o en la de aflicción sólo puede tener un aspecto: el de una realidad triste y dura contra la cual puede ejercerse toda la fuerza preventiva de nuestra naturaleza en poco más que el más elevado orden de las consideraciones prudenciales. Ahora bien, lo que se ha dicho sobre la cuestión particular que se ha considerado es igualmente aplicable a muchos otros de los temas debatidos de la filosofía; tales como, por ejemplo, la realidad externa del espacio y el tiempo. No tenemos justificación alguna para hacer de ellos meras formas del entendimiento, aunque incuestionablemente determinan la esfera presente de nuestro conocimiento. Y, por hablar más en general, no hay justificación para la tendencia extremadamente *subjetiva* de mucha de la especulación moderna. Dondequiera que en la consideración del intelecto sean diferentes hipótesis consistentes con un hecho observado ha de concederse *autoridad* en lo referente a su valor relativo al testimonio de la conciencia.

TERCERO.— Si el estudio de las leyes del pensamiento no nos permite ni determinar la constitución efectiva de las cosas ni explicar los hechos contenidos en aquella constitución que han confundido a los sabios y entristecido a los amantes

del pensar en todas las épocas aún menos nos permite elevarnos por encima de las condiciones actuales de nuestro ser o sancionar la doctrina que afirma la posibilidad de un conocimiento *intuitivo* de lo infinito y lo incondicionado, ya se busque dicho conocimiento en el ámbito de la naturaleza o por encima del mismo. Nunca puede decirse que *entendèmos* aquello que es representado ante el pensamiento como el límite de un proceso de abstracción indefinido. Una progresión *ad infinitum* es imposible para unos poderes finitos. Mas aunque no podemos entender lo infinito, puede que haya incluso razones científicas para creer que la naturaleza humana está constituída en alguna relación con el infinito. No podemos expresar perfectamente las leyes del pensamiento, o establecer en el sentido más general los métodos de que forman la base, sin la implicación de por lo menos elementos que el lenguaje ordinario expresa por los términos "Universo" y "Eternidad". Como en las abstracciones puras de la Geometría, se ve también en el ámbito de la Lógica que el imperio de la Verdad, es en cierto sentido, más amplio que el de la imaginación. Y así como hay muchos departamentos especiales del conocimiento que pueden sólo contemplarse completamente desde un punto de vista externo, la teoría de los procesos intelectuales, en tanto se aplica sólo a objetos finitos, parece contener el reconocimiento de una esfera del pensamiento de que se han retirado todos los límites. Si, pues, por una parte, no podemos descubrir en las leyes del pensamiento y sus analogías una base suficiente para probar las conclusiones de un misticismo demasiado atrevido, por la otra erraríamos si las considerásemos como no sugeridoras de nada en este sentido. En tanto partes de nuestra naturaleza intelectual no parece improbable que manifiesten su presencia de manera diferente a la mera prescripción de las condiciones de la inferencia formal. Cualesquiera razones tengamos para vincularlas con las tendencias particulares de la especulación física entre los filósofos jonios e itálicos son las mismas que existen para vincularlas con una propensión del pensamiento a un tiempo más común y más legítima. No debemos atribuir a influencias casuales, por lo menos, aquel espíritu meditativo que se deleita tanto más en la comunión con la magnificencia externa de la Naturaleza cuanto más de halla marcado por la conciencia de verdades sempiternas que lee en los cielos nocturnos una manifestación brillante del orden, o siente en algún lugar salvaje entre las colinas los indicios de algo más que aquella eternidad abstracta que se ha desarrollado antes de que se estableciesen sus oscuros fundamentos (53).

9. Absteniéndonos de la continuación de una cadena de pensamiento que a algunos puede parecer de un carácter demasiado especulativo, revisamos brevemente los resultados positivos a que hemos sido conducidos. Se ha patentizado que existen en nuestra naturaleza facultades que nos capacitan para elevarnos desde los hechos particulares de la experiencia hasta las proposiciones generales que forman la base de la Ciencia; así como facultades cuya función consiste en deducir a partir de proposiciones generales aceptadas como verdaderas las conclusiones particulares que contienen. Se ha visto que aquellas facultades se hallan sometidas en sus operaciones a leyes capaces de expresión científica precisa, mas investidas de una autoridad que en contraste con la autoridad de las leyes de la naturaleza, es distinta, *sui*

generis, y no derivada. Además, se ha hecho manifiesta la existencia de una adecuación patente entre el procedimiento intelectual así patentizado y las condiciones de aquel sistema de cosas que nos rodea, condiciones tales, quiero decir, como la existencia de especies vinculadas por semejanzas generales, de hechos asociados bajo leyes generales; junto con aquella unión entre la permanencia y el orden que mientras da estabilidad al conocimiento adquirido establece el fundamento de la esperanza en un progreso indefinido. La naturaleza humana, con independencia completa de sus tendencias observadas o manifiestas se ve como *constituída* por una cierta relación con la Verdad; y esta relación considerada como objeto de conocimiento especulativo es tan susceptible de estudiarse en sus detalles; es, además, tan merecedora de estudiarse de esa manera, como lo son los diversos departamentos de la ciencia física considerados de la misma manera. Dirigiría especialmente la atención hacia aquella opinión referente a la constitución del intelecto que lo representa como sometido a leyes determinadas en su carácter, mas no operativas a partir del poder de la necesidad, que las muestra como redimidas del dominio del destino sin que queden por ello abandonadas a la falta de legalidad del azar. No podemos adoptar esta opinión sin aceptar al menos como *probables* los indicios que, sobre la base del principio de analogía, parece proporcionar en lo referente a otro aspecto más elevado de nuestra naturaleza — su sujeción en el ámbito del deber así como en el del conocimiento a leyes fijas cuya autoridad no consiste en el poder— su constitución con referencia a un patrón ideal y a un propósito final. Se ha pensado ciertamente que la ocupación científica tiende a fomentar una tendencia ora a pasar por alto las diferencias específicas entre el mundo moral y el material, o a considerar al primero como en ningún sentido adecuado objeto de un conocimiento exacto. Sin duda todas las ocupaciones exclusivas tienden a producir opiniones parciales y puede darse el caso de que una mente inmersa desde antiguo y en profundidad en la contemplación de realidades sobre las que el dominio de la necesidad física es incuestionado y supremo pueda admitir con dificultad la posibilidad de otro orden de cosas. Mas es en razón de la *exclusividad* de esta dedicación a una esfera particular del conocimiento por lo que el prejuicio en cuestión se adueña, si es que lo hace, de la mente. La aplicación de métodos científicos al estudio de los fenómenos intelectuales llevados a cabo con un espíritu de investigación imparcial y sin pasar por alto aquellos elementos de error y perturbación que han de aceptarse como *hechos*, aunque no puedan considerarse como *leyes* en la constitución de nuestra naturaleza parece proporcionar los materiales de una analogía mejor fundada.

10. Si se preguntase a qué fin *práctico* apuntan investigaciones como las anteriores, podría responderse que existen varios asuntos en relación con los cuales los cursos de las acciones humanas son determinados principalmente por las opiniones especulativas respecto a la naturaleza humana. La educación, considerada en su más amplio sentido, es uno de esos asuntos. El fundamento último de toda investigación sobre su naturaleza y sus métodos debe ponerse en alguna teoría previa sobre lo que el hombre es, cuáles son los fines para los que se proyectaron sus distintas faculta-

des, cuáles son los motivos que tienen fuerza para influenciar en ellos una acción continuada y obtener sus más perfectos y estables resultados. Podría dudarse si estas cuestiones han sido en alguna ocasión consideradas por extenso y a un tiempo de un modo imparcial en las relaciones aquí sugeridas. El cultivo más elevado del gusto mediante el estudio de los puros modelos de la antigüedad, el conocimiento más amplio de las teorías y los hechos de la moderna ciencia física, considerados desde este aspecto más amplio de nuestra naturaleza pueden sólo manifestarse como partes de una disciplina intelectual perfecta. Considerando desde el mismo punto de vista los medios a emplear podríamos ser llevados a investigar si esa casi exclusiva apelación al espíritu de emulación o codicia que se hace hoy en día no tiende a debilitar la influencia de aquellos motivos más duraderos que parecen haber sido implantados en nuestra naturaleza para el cumplimiento del fin en cuestión. A este respecto y en lo referente a tantas otras cuestiones, los límites justos de la autoridad, la reconciliación de la libertad de pensamiento con la disciplina de los sentimientos, los hábitos, los modales, y en lo referente al aspecto *moral* global de la cuestión, ¡qué falta de estabilidad en los criterios, qué diversidad en las prácticas encontramos! Sin embargo, desde el sobrio punto de vista de la razón no hay asunto dentro del ámbito de los esfuerzos humanos que tenga más peso e importancia que éste, considerado, como he dicho, en su más amplio significado. Ahora bien, cualquier cosa que tienda a hacer más exacto y definido nuestro conocimiento de la naturaleza humana en cualquiera de sus aspectos reales, tiende en la misma proporción a reducir estas cuestiones a un ámbito más estrecho y a restringir los límites de su solución posible. De este modo pueden incluso las investigaciones especulativas mostrarse como fructíferas para los más importantes principios de la acción.

11. Quizás la más obviamente legítima relación de tales especulaciones sería sobre la cuestión del lugar de las matemáticas en el sistema del conocimiento humano y la naturaleza y el papel de los estudios matemáticos como instrumentos de la disciplina intelectual. Nadie que haya asistido al curso de discusiones recientes puede pensar que esta cuestión carece de importancia. Aquellos que han mantenido que la posición de las matemáticas es en ambos respectos fundamental han extraído uno de sus más potentes argumentos de la constitución efectiva de las cosas. La estructura material está sometida en todas sus partes a las relaciones numéricas. Todas las acciones dinámicas, químicas, eléctricas, térmicas, parecen no sólo mensurables en sí mismas sino hallarse en conexión entre sí, incluso hasta el punto de la mutua convertibilidad, mediante relaciones numéricas de un tipo perfectamente definido. Pero la opinión en cuestión paréceme que se apoya en una base más profunda que ésta. Las leyes del pensamiento, en todos sus procesos de concepción y de razonamiento, en todas aquellas operaciones de que el lenguaje es la expresión o el instrumento, son del mismo tipo al que pertenecen las leyes de los procesos reconocidos de las matemáticas. No se sostiene que nos sea necesario conocer tales leyes a fin de pensar correctamente, o, en el sentido habitual de los términos, para razonar bien. Los hombres infieren sin tener conciencia alguna de aquellos elemen-

tos de que depende todo el proceso. Menos aún deseamos exaltar la facultad razonadora por encima de las facultades de observación, reflexión, juicio. Mas sobre la base de que el pensamiento humano, si se rastrea hasta sus elementos se revela en formas matemáticas suponemos que las ciencias matemáticas ocupan, por la constitución de nuestra naturaleza, un lugar fundamental en el conocimiento humano y que ningún sistema de cultura mental puede ser completo o fundamental si los descuida enteramente.

Pero la misma clase de consideraciones muestra con igual fuerza el error de aquellos que consideran el estudio de las matemáticas, y de sus aplicaciones, como base suficiente del conocimiento o de la disciplina. Si la constitución de la estructura material es matemática, no lo es únicamente. Si la mente, en su capacidad de razonamiento formal obedece, ya sea de manera consciente o inconsciente a leyes matemáticas, pretende mediante sus otras capacidades de sentimiento y acción, mediante sus percepciones de la belleza y la corrección moral, mediante sus profundos brotes afectivos y emotivos mantener relaciones con un orden diferente de cosas. Existe además una amplitud de visión intelectual, un poder de simpatía con la verdad en todas sus formas y manifestaciones que no se mide por la fuerza y sutileza de la facultad dialéctica. Incluso la revelación del universo material en su magnitud infinita y omnipresente orden, y constancia en cuanto a la ley, no es necesariamente comprendido por aquel que ha seguido con la mayor minuciosidad los pasos de la gran demostración. Y si abarcamos en nuestra consideración general los intereses y los deberes de la vida, ¡cuán poco os permiten cualesquiera procesos de mero raciocinio comprender las cuestiones de tan gran importancia que presentan! Tan cierto como que, por lo tanto, el cultivo de la facultad matemática o deductiva es una parte de la disciplina intelectual lo que es tan sólo una parte. El prejuicio que quisiera o prescindir o estimar como suprema a cualquier departamento del conocimiento o facultad mental delata no sólo error de juicio sino también una carencia de aquella modestia intelectual que es inseparable de una devoción pura por la verdad. Asume el papel de crítico frente a una constitución de las cosas que ningún decreto humano ha establecido o puede anular. Anula la antigua y correcta concepción de la verdad que ve en ésta algo uno aunque múltiple. Gran parte de este error, tal como existe hoy en día entre nosotros, parece deberse al carácter especial y aislado de la enseñanza científica—carácter que, a su vez, tiende a fomentar. El estudio de la filosofía, a pesar de algunos casos notorios excepcionales, ha fracasado a la hora de seguir el ritmo del avance de los diversos departamentos del conocimiento, cuyas relaciones mutuas es su incumbencia determinar. Es imposible sin embargo, no contemplar el mal particular en cuestión como parte de un sistema más amplio, y vincularlo con la opinión hoy demasiado predominante referente al conocimiento que lo considera como algo meramente secular, y con el predominio indebido de aquellos motivos ya referidos, legítimos dentro de sus límites propios, que se fundan sobre la consideración de sus ventajas prácticas. En un caso extremo no es difícil ver que la acción continuada de tales motivos sin el control de principios de acción más elevados, sin la corrección de la influencia

personal de mentes superiores, debe tender a hacer bajar los estandars del pensamiento en referencia a los objetos del conocimiento y a hacer vacíos e inefectivos cualesquiera elementos de una noble fe que aún subsistan. Y en la proporción en que se realicen tales condiciones deben seguirse los mismos efectos. De aquí, quizás, que hallemos a veces concepciones más correctas de la unidad, la conexión vital y la subordinación a un propósito moral de las diferentes partes de la Verdad entre aquellos que no reconocen nada más elevado que el aspecto cambiante de la humanidad colectiva que entre aquellos que profesan una lealtad intelectual al Padre de las Luces. Pero estas son cuestiones que no pueden seguirse considerando aquí. A algunos les parecerán extrañas al propósito declarado de esta obra. Mas la consideración de las mismas ha brotado espontáneamente, ora a partir de las especulaciones que aquel propósito contenía, o en el curso de la lectura y la reflexión que pareció necesaria para su cumplimiento.

REFERENCIAS

(33) La siguiente ilustración puede bastar:

> Se mantiene por algunas de las más altas autoridades modernas en gramática que las conjunciones conectan tan sólo proposiciones. Ahora bien, sin investigar directamente si esta opinión está bien fundamentada o no lo está, es obvio que no puede mantenerse consistentemente por nadie que admita los principios científicos de este tratado, pues para tales parecería contener una negación de, o, primero, la posibilidad de llevar a cabo una operación mental, o, segundo, de la posibilidad de expresarla, cuyas leyes, en ambos casos, se han investigado y aplicado en esta obra (Latham sobre el idioma inglés; Sir John Stoddart: Gramática universal etc).

(34) Whewell: Philosophy of the Inductive Sciences, p. 71, 77, 213.

(35) Sobre la idea del orden se ha dicho con profundidad que lleva consigo su propia justificación o su propio control siendo juzgada la misma fiabilidad de nuestras facultades por la conformidad de sus resultados con un orden que satisface a la razón "L' idée de 1' ordre a cela de singulier et d' eminent, qu' elle porte en elle même sa justification ou son contrôle. Pour trouver si nos autres facultés nous trmpent ou nous ne trompent pas, nous examinons si les notions qu' elles nous donnent s' enchaînent ou ne s' enchaînent pas suivant un ordre qui satisfasse la raison" – Cournot Essai sur les fondements de nos connaissances. Admitiendo este principio como la guía de aquellos poderes de abstracción que sin duda poseemos parece poco filosófico suponer que las ideas fundamentales de las ciencias no sean derivables de la experiencia. Sin duda que las capacidades que nos han sido dadas para la comprensión del mundo real nos servirían en un mundo constituido de un modo diferente, siempre que de una u otra manera se mantuviera el dominio del orden. Es concebible que en un teatro tal de especulación, siendo las mismas las leyes del procedimiento intelectual, las ideas fundamentales de la ciencia podrían ser enteramente diferentes de aquellas que conocemos a la sazón.

(36) Ver varios pasajes en la Metafísica de Aristóteles, Libro I.

(37) † Ἐδόκει δὲ αὐτῷ τὸ πᾶν ἄπειρον εἶναι, καὶ ἀναλλοίωτον, καὶ ἀκίνητον, καὶ ἕν, ὅμοιον ἑαυτῷ καὶ πλῆρες. κινησίν τε μὴ εἶναι δοκεῖν δὲ εἶναι.—*Diog. Laert.* IX. cap. 4.

(38) ‡ Νοῦν δή τις εἰπὼν ἐνεῖναι, καθάπερ ἐν τοῖς ζῴοις, καὶ ἐν τῇ φύσει, τὸν αἴτιον τοῦ κόσμου καὶ τῆς τάξεως πάσης οἷον νήφων ἐφάνη παρ' εἰκῇ λέγοντας τοὺς πρότερον. Φανερῶς μὲν οὖν Ἀναξαγόραν ἴσμεν ἁψάμενον τούτων τῶν λόγων, αἰτίαν δ' ἔχει πρότερον Ἑρμότιμος ὁ Κλαζομένιος εἰπεῖν.—*Arist. Met.* I. 3.

(39) * Ξενοφάνης δὲ... εἰς τὸν ὅλον οὐρανὸν ἀποβλέψας, τὸ ἓν εἶναι φησι τὸν θεόν.— *Ib.*

(40) Las líneas siguientes, preservadas por Sexto Empírico y atribuidas a Timón el Silógrafo no están desprovistas de pathos:

ὡς καὶ ἐγὼν ὄφελον πυκινοῦ νόου ἀντιβολῆσαι
ἀμφοτερόβλεπτος (δολίῃ δ' ὁδῷ ἐξεπατήθην,
πρεσβυγενὴς ἔτ ἐὼν) καὶ ἀναμφήριστος ἁπάσης
σκεπτοσύνης· ὕππη γὰρ ἐμὸν νόον εἰρύσαιμι,
εἰς ἓν τ' αὐτὸ τε πᾶν ἀνέλυετο.

Las tomo de Ritter y me aventuró a traducirlas como sigue:

¡Sé mía, no más confinada a opiniones parciales o dudas escépticas, mente iluminada por la verdad!

Pues, desde antiguo engañado, y atento sin embargo aún a la verdad, los años de la vida van disminuyendo en desordenados errabundeos, pero el pensamiento inquieto intenta la misma búsqueda, y aún el Uno, el Todo, escapa a mi mirada.

(41) Arist. Met. I 4.6.

(42) Arist. Met. I 4.9.

(43) † παλίντροπος ἁρμονίη ὅκως περ τόξου καὶ λύρης.—*Heraclitus*, quoted in *Origenis Philosophumena*, IX. 9. Also *Plutarch, De Iside et Osiride.*

(44) ‡ Ἐπεὶ δὲ καὶ τἀναντία τοῖς ἀγαθοῖς ἐνόντα ἐφαίνετο ἐν τῇ φύσει, καὶ οὐ μόνον τάξις καὶ τὸ καλὸν ἀλλὰ καὶ ἀταξία καὶ τὸ αἰσχρόν, καὶ πλείω τὰ κακὰ τῶν ἀγαθῶν καί τὰ φαῦλα τῶν καλῶν, οὕτως ἄλλος τις φιλίαν εἰσήνεγκε καὶ νεῖκος, ἑκάτερον ἑκατέρων αἴτιον τούτων.—*Arist. Metaphysica*, I. 4.

(45) Sirva como evidencia Aristóteles en su bien conocida derivación de los elementos a partir de las cualidades "caliente" y "seco" y sus contrarios. Es característico que Platón vincula su generación con principios matemáticos. Timeo, cap. XI.

(46) • Αὐτὸς καὶ ὑπὲρ θέσιν ἐστὶ καὶ ἀφαίρεσιν.—*Dion. Areop. De Divinis Nominibus*, cap. II.

(47) Ver especialmente la elevada tensión del comienzo de Hildebert: "Alpha et ¿¿ magne Deus" (Trench' s Sacred Latin Poetry). El principio sobre el que se apoyan todas estas especulaciones se expone así en el tratado referido en la última nota – Texto en griego, página 415... Y el tipo de conocimientos que se busca obtener se describe como "una

oscuridad más allá de la luz" ὑπερφῶτος γνόφος. Milton expresa un pensamiento parecido "Oscuros con brillo excesivo se manifiestan tus bordes" Par. Lost, Libro III.

Compárese con esto la más noble simplicidad de 1 Juan, i. 5.

(48) Monologium, Prosologium, y De Veritate.

(49) ‡ "Idcirco cum ipse summus spiritus dicit seipsum dicit omnia quæ facta sunt."—*Monolog.* cap. XXIII.

(50) Ver disertaciones en Spinoza, Pico de la Mirandola, H. More, etc. Las discusiones modernas de este tema se dan en conexión principalmente con la estética, hallándose el fundamento de la aplicación en la fórmula de San Agustín: "Omnis porro pulchritudinis forma, unitas est".

(51) Por ejemplo, el docto misticismo de Gioberti, aun difiriendo ampliamente en su espíritu y sus conclusiones del panteismo de Hegel (hallándose quizás ambos igualmente lejos de la verdad) se le parece en cuanto que aplica tanto el pensamiento como al ser los principios de la unidad y la dualidad. Se pregunta. "Or non è egli chiaro che ogni discorso si riduce in fine in fine alle idee di Dio, del mondo, e della creazione, l'ultima delle quali è il legame delle due prime?" And this question being affirmatively answered in the formula, "l'Ente crea le esistenze," it is said of that formula,—"Essa abbraccia la realtà universale nella dualità del necessario e del contingente, esprime il vincolo di questi due ordini, e collocandolo nella creazion sostanziale, riduce la dualità reale a un principio unico, all unità primordiale dell' Ente non astratto, complessivo, e generico, ma concreto, individuato, assoluto, e creatore."—*Del Bello e del Buono*, pp. 30, 31.

(52) Pruebas de esta afirmación se hallarán en el notable tratado recientemente publicado bajo el título (cuya corrección parece dudosa) de Origenis Philosophumena. Las tempranas corrupciones del Cristianismo que contiene la historia, aunque muchas de ellas, como es evidente de su carácter ofita, derivaron de las mismas heces del paganismo manifiestan ciertas formas persistentes de especulación filosófica. En su mayor parte o pertenecen al esquema dualista o reconocen tres principios, primarios o derivados entre dos de los cuales puede hallarse la relación dualista. Orig. Phil. p. 135, 139, 150, 235, 253, 264.

(53) Salmo XC, 2.

COLECCION "LOGICA Y TEORIA DE LA CIENCIA"

publicado por PARANINFO S.A.

ALWOOD, ANDERSSON y DAHL.– LOGICA PARA LINGUISTAS.– Completa introducción a la lógica para su aplicación en la lingüística y, especialmente, en la semántica. Incluye un estudio de lógica modal, lógica intensional, gramática categorial y otros temas de interés para el lingüista, además de hacer constante referencia a la relación entre lenguajes naturales y artificiales. (204 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

BOCHENSKI.– COMPENDIO DE LOGICA MATEMATICA.– Especialmente dirigido a estudiantes de lógica de Facultades Universitarias de Letras y Ciencias. Manual escrito por uno de los mayores especialistas en Lógica Matemática e Historia de la Lógica, incluye abundante bibliografía en inglés y español. (120 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

BOUDOT.– LOGICA INDUCTIVA Y PROBABILIDAD.– De gran interés para estudiantes de Lógica, Estadística y Matemáticas. Estudio detallado de las relaciones entre inducción y teoría de la probabilidad. Especial análisis de las teorías de Reichenbach y Keynes. (348 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

FEYS y FITCH.– LOS SIMBOLOS DE LA LOGICA MATEMATICA.– Unica obra en la que se presentan y comparan las distintas notaciones simbólicas de la Lógica Matemática. (192 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

GARDIES.– LOGICA DEL TIEMPO.– Completa exposición de todos los sistemas existentes de lógica temporal. Incluye una discusión de las lógicas temporales gramaticales. (128 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

HAACK.– LOGICA DIVERGENTE.– Minucioso estudio de las más recientes direcciones de la lógica y, especialmente, de las que se apartan de la Lógica ortodoxa. (192 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

HAMILTON.– LOGICA PARA MATEMATICOS.– Destinada a los interesados en la Lógica en general y, sobre todo, a profesores y estudiantes de Matemáticas. Presenta de forma concisa y didáctica las principales técnicas y resultados en lógica matemática. Destaca la importancia de la lógica para el estudio de las matemáticas. (244 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

HUNTER.– METALOGICA. INTRODUCCION A LA METATEORIA DE LA LOGICA CLASICA DE PRIMER ORDEN.– El primer manual completo en castellano sobre este tema. De interés para los estudiosos de la Lógica, las Matemáticas y la Teoría de la Computación. Nociones básicas para el examen de los sistemas lógicos, estudio detallado de las propiedades de los mismos y teoremas anejos. (320 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

MARTINEZ FREIRE.–FILOSOFIA DE LA CIENCIA EMPIRICA.– Investigación exhaustiva de los principales temas de la Ciencia Empírica y de la Lógica Inductiva, siguiendo las doctrinas de Whewell. (232 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

THIBAUD.– LA LOGICA DE CHARLES SANDERS PEIRCE.– Estudio sucinto y esencial de la obra de Peirce, lógico americano muy valorado en la actualidad y fundador de la lógica de relaciones. Aspectos algebraicos y gráficos típicos de Peirce e importantes temas de la lógica modal. De interés para estudiantes y profesores de lógica. (De próxima aparición.)

WHITEHEAD y RUSSELL.– PRINCIPIA MATHEMATICA (Hasta * 56). Obra clásica por excelencia de la lógica matemática, que es punto de referencia obligado para los estudiosos de lógica y de matemáticas. Se sostiene en ella el denominado "logicismo" o fundamentación de las materias desde la lógica. Es, a su vez, un estudio completo de los fundamentos de la lógica matemática e inicia en los tópicos de la filosofía de la matemática. (472 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

Dado que la presente obra interesa por igual a estudiosos *y* estudiantes *de Lógica y de Matemáticas, incluimos a continuación las últimas publicaciones que PARANINFO ha incorporado a su Sección de MATEMATICAS.*

BAKHVALOP.– METODOS NUMERICOS. ANALISIS. ALGEBRA. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.– La teoría de los métodos numéricos estudiada en el contexto de las restantes ramas científicas y teniendo en cuenta los problemas que plantean sus aplicaciones. (736 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

BRAY, CROXTON y MARTIN.– ANALISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS.– Para adquirir un perfecto conocimiento de los métodos matriciales partiendo de una base elemental de aritmética matricial, a través del método matricial de los desplazamientos y del método de fuerzas. (160 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

DEMIDOWITSCH, MARON y SCHUVALOWA.– METODOS NUMERICOS DE ANALISIS.– Todo cuanto refiere al análisis numérico, la proximación de funciones y las ecuaciones diferenciales. (484 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

FEYEL y DE LA PRADELLE.– EJERCICIOS SOBRE LAS FUNCIONES ANALITICAS. CON SOLUCIONES.– Dirigido especialmente a estudiantes que preparan su licenciatura. Incluye ejercicios en orden de dificultad. (340 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

QUINET.– CURSO ELEMENTAL DE MATEMATICAS SUPERIORES.– 6 tomos. Práctico, pedagógico y moderno. De nivel universitario y para que los lectores comprendan y dominen las complejidades y dificultades de las matemáticas en poco tiempo. (Tomo 1: 240 págs.– Tomo 2: 302 págs.– Tomo 3: 298 págs.– Tomo 4: 200 págs.– Tomo 5: 296 págs.– Tomo 6: 274 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

RIOS.– ALGEBRA LINEAL Y GEOMETRIA VECTORIAL.– El álgebra de conjuntos, las relaciones binarias, el Algebra de Boole, las ecuaciones lineales y otros temas de interés para matemáticos. (392 págs.– 16 x 22 cm.– Rústica.)

SEVILLA.– ECUACIONES DIFERENCIALES. TABLAS Y OTROS DATOS MATEMATICOS.– Más un formulario que un libro de texto que debe utilizarse siempre con reflexión y complementándolo con tratados matemáticos sobre el tema. Incluye apéndices de gran utilidad práctica y se completa con 43 tablas que pueden utilizarse en computador. (352 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

SIMONNARD.– PROGRAMACION LINEAL.– Con interesantes capítulos que permiten llegar fácilmente a teoremas fundamentales como el de la dualidad o a la teoría de las redes de transporte. Se completa con apéndices sobre el Algebra lineal, los poliedros convexos y la teoría de los grafos. (2ª edición.)

EDITORIAL
PARANINFO S.A.
Magallanes, 25.—Madrid-15.

ISBN: 84-283-1168-4